

**То, что вы хотели знать о самоподобном телетрафике,  
но стеснялись спросить.**

---

**Петров В.В.**

МЭИ, ИРЭ, Москва, Красноказарменная 13,  
v\_petrov@skc.ru

Август 2003

**Abstract.** *Recent network packet traffic investigations have demonstrated, that it is self-similar process and more conventional models, such a simple Markovian (memory-less) models have fault. Also, it is well-known, that self-similar nature of network traffic leads to a number of undesirable effects like high buffer overflow rates, large delays and persistent periods of congestion and the severity of these conditions is directly proportional to the degree of self-similarity or the Hurst parameter. On the other hand, the long memory property of self-similar traffic is able to help to forecast traffic for the purpose of quality of service (QoS) provision. Another interesting area in the network traffic studies is using the methods of non-linear analysis (chaos theory) for its parameter modeling and prediction. The article contains the groundwork of the self-similar traffic and its relationship with fractals and chaos.*

**Keywords.** *Self-Similarity, Long-Range Dependence, Long memory, Fractal Brownian Motion, Hurst, Heavy tail, Fractal dimension, Chaos.*

## Содержание

Используемые сокращения .....	2
1. Понятие фрактальности .....	3
2. Самоподобие. Начала.....	5
3. Основные свойства самоподобных процессов.....	8
4. Медленно, быстро убывающие зависимости, продолжительная память.....	11
5. Броуновское движение.....	14
6. Фрактальная размерность.....	22
7. Кто же он, этот парень, Хэрст? .....	25
8. Связь между фрактальной размерностью и коэффициентом Хэрста. ....	28
9. Тяжесть хвостов.....	31
10. Самоподобие сетевого трафика. Реалии.....	33
11. От фрактальности и самоподобия к хаосу.....	39
12. Заключение .....	45
Литература .....	46

## Используемые сокращения

БУЗ	Быстро убывающая зависимость
МУЗ	Медленно убывающая зависимость
АКФ	Автокорреляционная функция
ФГШ	Фрактальный гауссовский шум
ССШС	Строгое самоподобие в широком смысле
АСШС	Асимптотическое самоподобие в широком смысле
СУС	Самоподобие в узком смысле
ЦПТ	Центральная предельная теорема
СКО	Среднеквадратическое отклонение
БД	Броуновское движение
ФБД	Фрактальное броуновское движение

## 1. Понятие фрактальности

Блох больших кусают блошки,  
Блошек тех – малютки-крошки,  
Нет конца тем паразитам,  
Как говорят ad infinitum.

Дж. Свифт “Стихотворения”, II, 651 (1733)

Понятие *фрактал* было впервые введено Бенуа Мандельбротом в 1975 году. Слово образовано от латинского *fractus* – состоящий из фрагментов. С математической точки зрения фрактальный объект, прежде всего, обладает дробной (нецелой) размерностью.

Известно, что точка имеет размерность, равную нулю, отрезок прямой и окружность (характеризующиеся длиной) – единице, круг и сфера (характеризующиеся площадью) – двум. Однако, что представляет собой множество с размерностью 1.5? Очевидно, для его описания требуется нечто среднее между длиной и площадью. Еще раньше, в 1919 году, Ф. Хаусдорф привел первые примеры объектов, обладающих дробной размерностью (Канторово множество, кривая Кох и пр.).

Другое важное свойство, которым обладают почти все фракталы – свойство *самоподобия* (масштабная инвариантность). Оказывается, фрактал можно разбить на сколь угодно малые части так, что каждая часть окажется просто уменьшенной частью целого. Другими словами, если посмотреть на фрактал в микроскоп, то мы увидим ту же самую картинку, что и без микроскопа! Примером природного фрактального объекта является представленный на рис. 1 лист папоротника. Природа создавала фракталы на протяжении миллионов лет. Фактически большинство вещей в природе – не круги, квадраты или линии. Вместо этого они – фракталы, и создание этих фракталов обычно определяется уравнениями *хаоса*. Хаос и фрактальная красота представляют природу реальности. С этим нужно свыкнуться. Поэтому применение аппарата теории нелинейной динамики (теории хаоса) для исследования самоподобного телетрафика представляется также достаточно перспективным направлением и разумным развитием идей фрактальности

трафика. Заметим, что термин *хаос* подразумевает под собой словосочетание *детерминированный хаос*, однако в разговорной речи слово “детерминированный” часто опускается. В этом смысле, принцип детерминированности потенциально может играть значительную роль не только в сетевом трафике, но и во многих аналогичных процессах, кажущихся на первый взгляд случайными. В последнее время работ в данной области появляется все больше [16],[17],[18].



Рис.1. Пример фрактального объекта в природе – лист папоротника.

В отличие от детерминированных фракталов, стохастические фрактальные объекты (процессы), как правило, описываются масштабной инвариантностью (самоподобием) статистических характеристик второго порядка (свойство неизменности коэффициента корреляции при масштабировании). Как раз с такими стохастическими фракталами мы столкнемся при изучении характеристик сетевого трафика. В этой связи в литературе понятия фрактального и самоподобного телетрафика часто используются как синонимы.

## 2. Самоподобие. Начала.

Впервые о самоподобном телетрафике заговорили с момента его открытия в 1993 году группой ученых W.Leland, M.Taqqu, W.Willinger и D.Wilson [1], которые исследовали Ethernet-трафик в сети корпорации Bellcore и обнаружили, что на больших масштабах он обладает свойством самоподобия, то есть выглядит качественно одинаково при любых (достаточно больших) масштабах временной оси. При этом оказалось, что в условиях самоподобного трафика, методы расчета компьютерной сети (пропускной способности каналов, емкости буферов и пр.) основанные на марковских моделях и формулах Эрланга, которые с успехом используются при проектировании телефонных сетей, дают неоправданно оптимистические решения и приводят к недооценке нагрузки. Различие между компьютерной и телефонной сетями здесь следует понимать в следующем смысле: так уж исторически сложилось, что телефонные сети изначально строились по принципу коммутации каналов. Характеристики трафика в данных сетях хорошо изучены, а также разработаны строгие методики расчетов. В основу компьютерных сетей, как правило, был положен принцип коммутации пакетов, а методики расчетов, возможно, вследствие некоторого отставания науки от бурно развивающихся технологий, остались практически теми же, что и привело к возникновению “проблемы самоподобия”. Тем не менее, в настоящее время все большее распространение получают способы передачи речевой информации по сетям с коммутацией пакетов VoIP, ОКС№7 [14], трафик которых, естественно, также является самоподобным.

Дадим определения строго и асимптотически самоподобных в широком смысле случайных процессов дискретного аргумента и укажем их связь с процессами, самоподобными в узком смысле, и с процессами с медленно убывающей зависимостью. Следует заметить, что теория самоподобного телетрафика проходит относительно раннюю стадию своего развития, по этой

причине существуют некоторые различия в терминологии и даже в определениях.

**Обозначения.** Пусть  $X=(X_1, X_2, \dots)$  - полубесконечный отрезок стационарного<sup>1</sup> в широком смысле случайного процесса дискретного аргумента (времени)  $t \in N=\{1,2,\dots\}$ . Обозначим через  $\mu < \infty$  и  $\sigma^2 < \infty$  среднее и дисперсию процесса  $X$  соответственно, а через

$$r(k) = \frac{\Delta (X_{t+k} - \mu)(X_t - \mu)}{\sigma^2},$$

$$b(k) = \sigma^2 r(k), \quad k \in Z_+ = \{0,1,2,\dots\}$$

- автокорреляционную функцию и автоковариацию процесса  $X$ . Так как процесс  $X$  – стационарный в широком смысле, среднее  $M[X] = \mu$ , дисперсия  $D[X] = \sigma^2 \equiv b(0)$ , коэффициент корреляции  $r(k)$  и автоковариация  $b(k)$  не зависят от времени  $t$  и  $r(k) = r(-k)$ ,  $b(k) = b(-k)$ .

Допустим [1], процесс  $X$  имеет автокорреляционную функцию следующего вида:

$$r(k) \sim k^{-\beta} L_1(k), \quad k \rightarrow \infty \quad (2.1)$$

где  $0 < \beta < 1$  и  $L_1$  – медленно меняющаяся на бесконечности функция, то есть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_1(tx)}{L_1(t)} = 1 \quad \text{для всех } x > 0 \quad (\text{примерами медленно меняющейся функции}$$

могут служить  $L_1(t) = \text{const}$ ,  $L_1(t) = \log(t)$ ).

Обозначим через  $X^{(m)} = (X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \dots)$  - усредненный по блокам длины  $m$  процесс  $X$ , компоненты которого определяются равенством

$$X_t^{(m)} = \frac{1}{m} (X_{t-m+1} + \dots + X_t), \quad m, t \in N \quad (2.2)$$

В дальнейшем изложении будем называть такой ряд – **агрегированным**. Обозначим через  $r_m(k)$ ,  $b_m(k)$  и  $V_m = b_m(0)$  коэффициент корреляции, автоковариацию и дисперсию процесса  $X^{(m)}$  соответственно.

<sup>1</sup> Напомним, что случайный процесс **стационарен в узком смысле**, если статистические свойства этого процесса не меняются с течением времени. Если же ограничить требования тем, чтобы математическое ожидание и дисперсия процесса не зависели от времени, а функция корреляции зависела лишь от разности  $\tau = |t_2 - t_1|$ , то подобный процесс будет **стационарен в широком смысле**.

Приведем ниже определение строго самоподобного в широком смысле процесса.

**Определение** [4]. Процесс  $X$  называется *строго самоподобным в широком смысле* [ССШС] (exactly second-order self-similar) с параметром  $H=1-(\beta/2)$ ,  $0<\beta<1$ , если

$$r_m(k)=r(k), \quad k \in Z_+, \quad m \in \{2,3,\dots\} \quad (2.3)$$

то есть, что ССШС процесс не меняет свой коэффициент корреляции после усреднения по блокам длины  $m$ .

Другими словами [1],  $X$  – ССШС, если агрегированный процесс  $X^{(m)}$  неотличим от исходного процесса  $X$ , как минимум в отношении статистических характеристик второго порядка.

**Определение** [3]. Процесс  $X$  называется *асимптотически самоподобным в широком смысле* (АСШС) [second-order asymptotical self-similarity] с параметром  $H=1-(\beta/2)$ ,  $0<\beta<1$ , если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m(k) = g(k), \quad k \in N \quad (2.4)$$

Смысл этого определения состоит в том, что  $X$  является АСШС процессом, если после усреднения по блокам длины  $m$  и при  $m \rightarrow \infty$  он сходится к ССШС процессу.

Вместе с понятием ССШС существует понятие просто самоподобного процесса, которое для большего терминологического различия мы будем называть самоподобным в узком смысле процессом СУС.

**Определение** [3]. Процесс  $X$  называется *самоподобным в узком смысле* (СУС) [strictly self-similarity] с параметром  $H=1-(\beta/2)$ ,  $0<\beta<1$ , если справедливо выражение

$$m^{1-H} X^{(m)} \stackrel{\cdot}{=} X, \quad m \in N, \quad (2.5)$$

которое понимается в смысле равенства распределений. Связь между процессами ССШС и СУС аналогична связи между процессами, стационарными в широком и узком смыслах.

Необходимое и достаточное условие того, что процесс называется ССШС дано в [3].

Возвращаясь к работе [1], исследователи отметили одинаковость распределений исходного и агрегированного процессов (при больших  $m$ ), измерили параметр  $H$  (параметр Хэрста) [Hurst parameter], названный так в честь британского климатолога Хэрста (см. ниже), и обнаружили, что последний для сетевого трафика находится в интервале  $(\frac{1}{2}, 1)$ . На качественном уровне такой самоподобный трафик имеет постоянный взрывной характер [burstiness] на многих масштабах временной оси. Для описания подобных процессов иногда [2] употребляют специальный термин – *хэрстность* [Hurstiness].

### 3. Основные свойства самоподобных процессов

Наиболее интересная черта самоподобных процессов – медленное убывание автокорреляционной функции агрегированного процесса  $X^{(m)}$  при  $m \rightarrow \infty$ , в отличие от распространенных стохастических моделей, для которых выполняется (3.1)

$$r_m(k) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad k \in N \quad (3.1)$$

В 1984 году Сох показал, что задание АКФ в виде (2.1), или задание спектральной плотности в виде (4.1) (см. ниже) равносильно определению процесса со следующей дисперсией:

$$\sigma^2 \sim am^{-\beta}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (3.2)$$

где  $a$  – конечная положительная константа, не зависящая от  $m$ , и  $0 < \beta < 1$ .

С другой стороны, для процессов, удовлетворяющих (3.1), можно показать выполнение

$$\sigma^2 \sim bm^{-1}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

где  $b$  – конечная положительная константа, не зависящая от  $m$ .

На качественном уровне в соответствии со свойствами (3.2) и (3.3) можно предположить, что самоподобный процесс при достаточно больших  $m$  выглядит менее сглаженным, более не равномерным, (т.е. обладает большей дисперсией) чем процесс, удовлетворяющий (3.1). Действительно, достаточно взглянуть на рис.2, чтобы в этом убедиться.

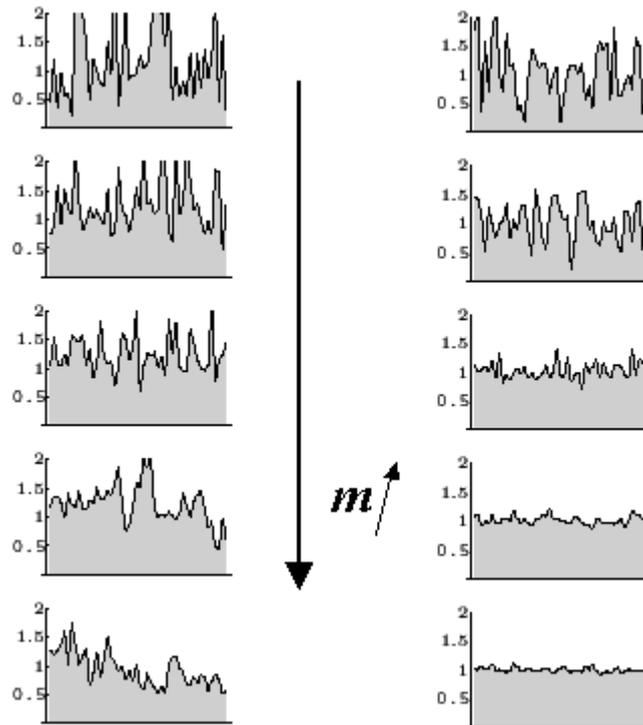


Рис. 2. Временные реализации реального сетевого (самоподобного) трафика (слева) и традиционной не самоподобной (Пуассоновской) модели телетрафика (справа) при различных масштабах временной оси [2]. Сверху вниз масштаб временной оси укрупняется.

Следует заметить, что процесс  $X$  не может быть самоподобным в узком смысле, если его среднее значение не равно нулю. Действительно, в силу (2.5)

$$M[X] = m^{1-H} M[X^{(m)}] \quad (3.4)$$

Можно показать, что в силу (2.2)  $M[X^{(m)}] = M[X]$ , тогда (3.4) выполняется только в случае  $M[X] = 0$ .

Поведение процесса  $X$  при агрегировании (2.2) имеет принципиальное значение, поскольку некоторые процессы в теории сетей, например буферизация, выделение полосы, можно рассматривать как оперирование именно с агрегированным процессом. Чтобы представлять особенности, которые могут проявляться у агрегированных процессов, рассмотрим простой пример, приведенный в [6].

Пусть приращения  $\varepsilon$  (т.е. первые разности) временного ряда  $X$  являются случайными. Тогда первые  $m$  членов ряда можно записать:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1, \\ X_2 &= X_1 + \varepsilon_1, \\ X_3 &= X_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ &\dots \\ X_m &= X_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{m-1} \end{aligned}$$

а второй набор из  $m$  членов – как

$$\left. \begin{aligned} X_{m+1} &= X_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m \\ X_{m+2} &= X_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m + \varepsilon_{m+1} \\ X_{m+3} &= X_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m + \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_{m+2} \\ &\dots \\ X_{2m} &= X_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{2m-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Если вычислить разность между средним второго и первого наборов, то получим

$$d = (1/m) (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \dots + (m-1)\varepsilon_{m-1} + m\varepsilon_m + (m-1)\varepsilon_{m+1} + \dots + \varepsilon_{2m-1}). \quad (3.6)$$

Заметим, что  $d$  представляет собой первую разность агрегированного ряда, определенного в соответствии с (2.2). Найдем дисперсию  $d$ :

$$\begin{aligned} D[d] &= D[\varepsilon] \cdot \frac{1}{m^2} (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (m-1)^2 + m^2 + (m-1)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1) = \\ &= D[\varepsilon] \cdot \frac{1}{m^2} (2 \cdot \sum_{j=1}^{m-1} j^2 + m^2) \end{aligned}$$

Найдем ковариацию двух последовательных разностей агрегированного ряда. Для этого умножим выражение (3.6) на аналогичное выражение, сдвинутое во времени на  $m$  и возьмем среднее:

$$b_m = D[\varepsilon] \cdot \frac{1}{m^2} (\sum_{j=1}^{m-1} j(j-1) + m(m-1)) = \frac{m^2 - 1}{6m} \cdot D[\varepsilon] \quad (3.7)$$

тогда корреляция  $R(m)$  между последовательными разностями агрегированного ряда равна

$$R(m) = \frac{m^2 - 1}{2(2m^2 + 1)} \quad (3.8)$$

Изобразим зависимость (3.8) от  $m$  графически:

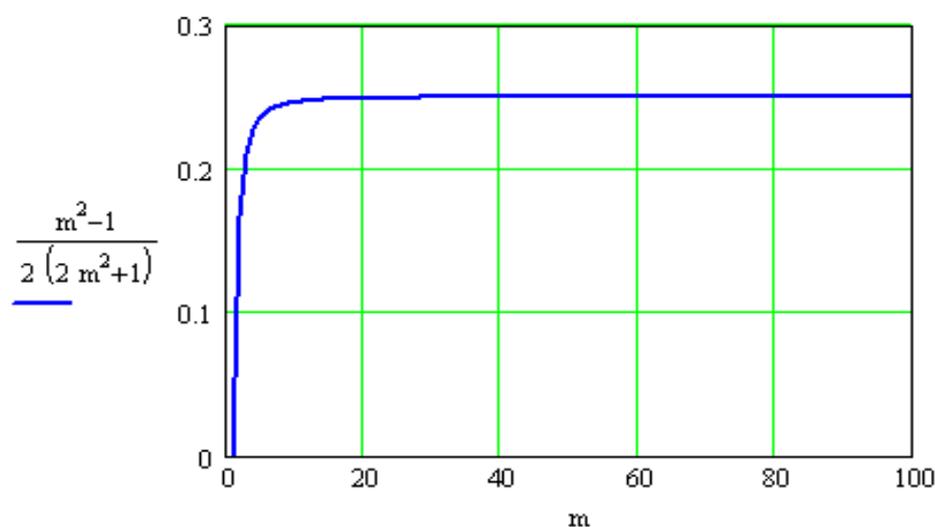


Рис. 3. Зависимость корреляции между соседними первыми разностями агрегированного ряда от значения  $m$

Таким образом, несмотря на то, что первые разности исходного ряда независимы, первые разности агрегированного ряда не являются таковыми.

#### **4. Медленно, быстро убывающие зависимости, продолжительная память**

Понятие медленно убывающей зависимости (автоковариации) имеет ключевое значение в теории самоподобных процессов и фактически описывает интересное в отношении прогнозирования свойство – продолжительную память [27], [28]. К сожалению, несмотря на долгие поиски, автору не встретилось строгого определения объекта с продолжительной памятью, однако на интуитивном уровне данное свойство можно объяснить следующим образом [19]: будущее процесса определяется его прошлым, причем с убывающей

степенью влияния по мере того, как прошлое удалено от настоящего. Таким образом, процесс с продолжительной памятью как бы “забывает” свое относительно давнее прошлое по мере продвижения времени в будущее.

Дадим несколько определений.

**Определение** [1], [3], [4]. Говорят, что процесс  $X$  обладает *медленно убывающей зависимостью* (МУЗ)<sup>1</sup> [long-range dependence], если выполняется (2.1). Таким образом, процессы с МУЗ характеризуются автокорреляционной функцией, которая убывает гиперболически (по степенному закону) при увеличении временной задержки (лага) (см. рис. 4).

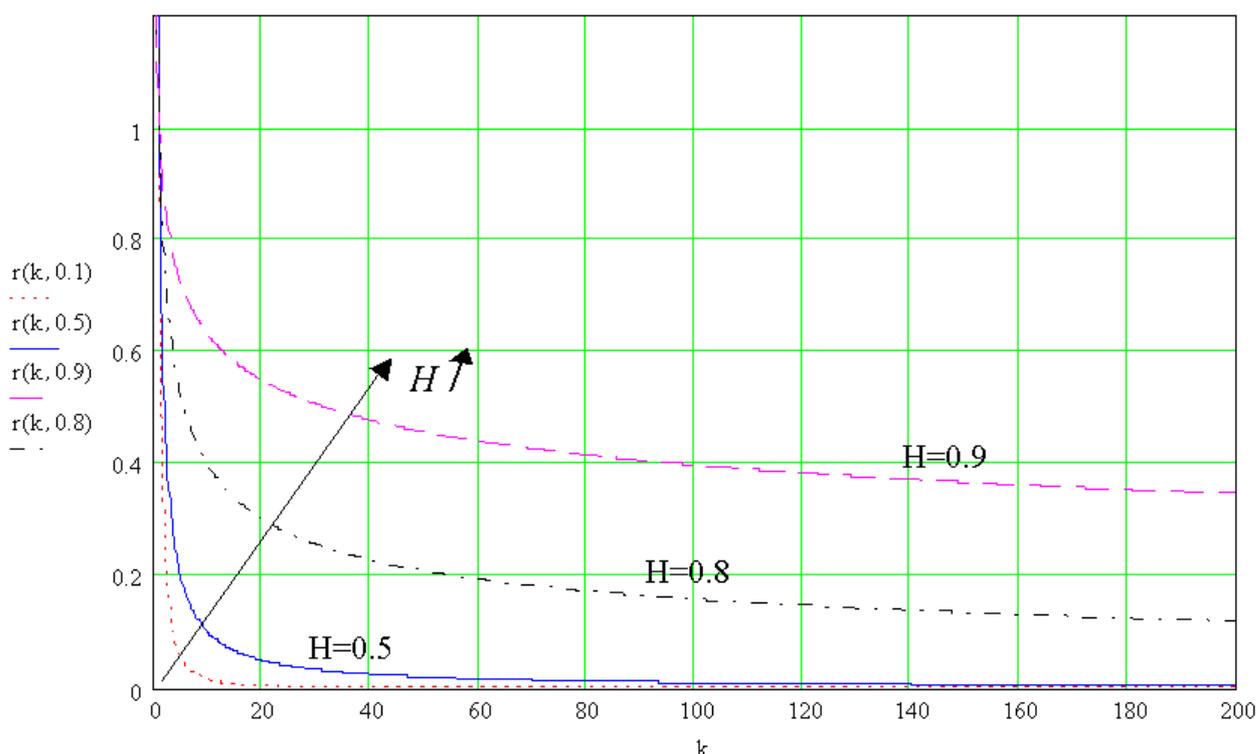


Рис. 4. Степенной закон убывания АКФ согласно (2.1) при различных значениях параметра  $H=1-(\beta/2)$ .

Более того, можно показать, что из (2.1) следует несуммируемость АКФ, то есть  $\sum_k r(k) = \infty$ .

<sup>1</sup> Сокращение “МУЗ” введено Цыбаковым Б.С. в [2]. В этой же работе используется сокращение “БУЗ” для обозначения быстро убывающих зависимостей.

В отличие от процессов с МУЗ, процессы с *быстро убывающей зависимостью* (БУЗ) [short-range dependence] обладают экспоненциально спадающей АКФ вида

$$r(k) \sim \rho^k, \quad k \rightarrow \infty, \quad 0 < \rho < 1 \quad (4.1)$$

и, как следствие, суммируемость АКФ:  $0 < \sum_k r(k) < \infty$

В частотной области МУЗ отражается на характерном степенном законе поведения спектральной плотности рассматриваемого процесса. Действительно, эквивалентно (2.1) можно констатировать, что процесс  $X$  обладает МУЗ, если

$$f(\lambda) \sim \lambda^{\beta-1} L_2(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad 0 < \beta < 1 \quad (4.2)$$

здесь  $L_2$  – медленно изменяющаяся в нуле функция,  $f(\lambda) = \sum_k r(k)e^{ik\lambda}$  - означает спектральную плотность. Таким образом, с точки зрения спектрального анализа процесс с МУЗ (кроме того, что имеет не суммируемую АКФ) обладает спектральной плотностью с особенностью в нуле (т.е. спектральная плотность  $f(\lambda)$  такого процесса стремится к бесконечности, по мере того как частота  $\lambda$  стремится к нулю). Такой процесс часто называют “1/f - шум” или “фликкер-шум”.

Можно отметить, что согласно приведенной в [3] теореме, МУЗ влечет за собой АСШС.

Прежде чем переходить непосредственно к исследованию реального сетевого трафика, имеет смысл рассмотреть классический образец стохастического фрактального объекта – броуновское движение и его производные: фрактальное броуновского движение и фрактальный гауссовский шум, с успехом использующиеся в качестве формальных моделей сетевого трафика, а также других процессов, обладающих статистическим самоподобием и продолжительной памятью.

## 5. Броуновское движение

В природе понятия фрактальности и случайности часто сосуществуют вместе. В частности, даже самые правильные кристаллы имеют множество случайно-распределенных по ним дефектов. По сути дела, даже если бы кристалл был идеальным, и каждый его атом занимал бы строго определенное положение, то подобное состояние поддерживалось бы только в среднем, поскольку атомы совершают постоянное тепловое движение. В этом смысле даже идеальные системы имеют элементы случайности.

В качестве простого случайного процесса, обладающего фрактальными свойствами, рассмотрим *броуновское движение* [Brownian motion] или процесс *случайных блужданий*, а также его обобщение – *фрактальное броуновское движение*, которые нашли широкое применение в физике, химии, биологии, экономике и теперь в теории телетрафика.

Броуновское движение было открыто в 1827 году английским ботаником Робертом Броуном [Brown] и представляет собой процесс случайных перемещений взвешенных в жидкости или газе мелких частиц, который является следствием их соударений с молекулами среды.

Что касается *случайного блуждания* [Random walk] – это процесс, описывающий перемещение частицы в некотором фазовом пространстве под воздействием случайного механизма. Поэтому часто броуновское движение (БД) отождествляется со случайным блужданием.

Траектория броуновской частицы выглядит приблизительно одинаково в различных масштабах временной оси и разрешении микроскопа, что указывает на самоподобие БД. Точнее, если рассматривать время как дополнительное измерение, то траектория такой частицы *самоаффинна*, а не самоподобна. Различие этих понятий заключается в том, что для самоаффинных траекторий коэффициенты подобия по различным измерениям (времени и пространству, например) могут быть различными, в то время как для самоподобных траекторий эти коэффициенты одинаковы для всех измерений.

Подчеркнем специально, что в броуновском движении независимыми являются смещения частицы за различные непересекающиеся интервалы времени, положения же частицы в различные моменты времени, конечно, зависимы, т.е. последующие значения зависят от предыдущих.

Рассмотрим броуновскую частицу, которая движется вдоль оси  $x$ , перемещаясь на расстояния  $\xi$  каждые  $\tau$  секунд. При этом приращения  $\xi$  положения частицы задаются гауссовской плотностью распределения вероятности:

$$p(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi S\tau}} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^2}{4S\tau}\right) \quad (5.1)$$

т.е. на интервале времени  $\tau$  шаг перемещения  $\xi$  выбирается случайным образом с плотностью  $p(\xi, \tau)$ . Другими словами, вероятность того, что приращение принадлежит диапазону  $(\xi, \xi+d\xi)$  равна  $p(\xi, \tau)d\xi$ . Последовательность таких случайных приращений  $\{\xi_i\}$  представляет собой множество независимых гауссовских случайных переменных. Дисперсия такого процесса:

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p(\xi, \tau) d\xi = 2S\tau \quad (5.2)$$

здесь параметр  $S$  – *коэффициент диффузии*.

Из (5.2) получаем соотношение Эйнштейна:

$$S = \frac{1}{2\tau} \cdot D[\xi] \quad (5.3)$$

Это соотношение справедливо при достаточно общих предположениях, когда временные интервалы между перемещениями неодинаковы, а распределение  $\xi$  непрерывно, дискретно или имеет довольно произвольный вид.

Перейдем к стандартному гауссовскому случайному процессу, заменив  $\xi$  на  $\xi/\sqrt{2S\tau}$  с нулевым средним и единичной дисперсией. На рис. 5а показана временная реализация случайной величины, обладающей стандартным гауссовским распределением. При этом координата броуновской частицы на оси  $x$  в момент времени  $t=n\tau$  задается следующим соотношением:

$$X(t = n\tau) = \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (5.4)$$

и показана на рис. 5б.

В пределе, при больших  $n$  и малых  $\tau$ , последовательность случайных чисел переходит в случайную функцию  $X(t)$ , называемую *функцией Брауна* и часто обозначаемую как  $B(t)$ .

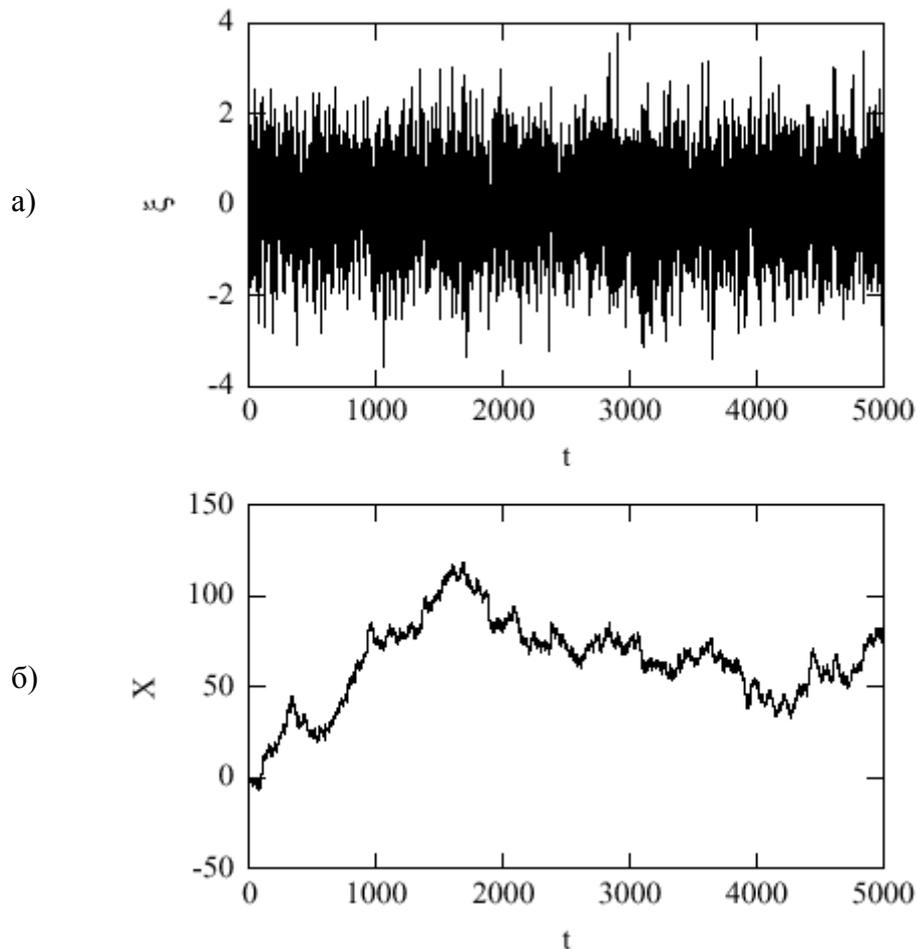


Рис. 5. Временная реализация случайной величины, обладающей стандартным гауссовским распределением с нулевым средним и дисперсией, причем наблюдения делаются через интервалы времени  $\tau$ ; а) Независимые приращения координаты броуновской частицы; б) Зависимость координаты броуновской частицы от времени.

Рассмотрим свойство масштабной инвариантности броуновского движения. Как правило, мы не можем наблюдать процесс случайных блужданий с бесконечным разрешением по оси времени. Поэтому полагают, что измерения делаются в моменты времени  $b\tau$ , где  $b$  – произвольное число. Допустим, для начала,  $b=2$  (см. рис. 6).

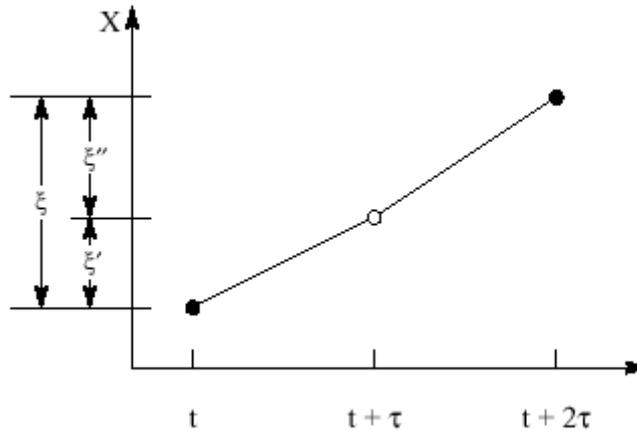


Рис. 6. Инкремент  $\xi$  положения броуновской частицы за время  $2\tau$

В данном случае, инкремент  $\xi$  представляет собой сумму независимых инкрементов  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Совместная вероятность  $p(\xi_1; \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2$  того, что первый инкремент  $\xi_1$  будет находится в интервале  $[\xi_1, \xi_1 + d\xi_1)$ , а второй – в интервале  $[\xi_2, \xi_2 + d\xi_2)$  определяется плотностью распределения

$$p(\xi_1; \xi_2, \tau) = p(\xi_1, \tau) \cdot p(\xi_2, \tau) \quad (5.5)$$

как произведение плотностей вероятности независимых событий. Интегрируя по всем возможным комбинациям  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , получаем плотность распределения вероятности инкремента  $\xi$

$$p(\xi, 2\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi - \xi_1, \tau) \cdot p(\xi_1, \tau) d\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi(4S\tau)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2(4S\tau)}\right) \quad (5.6)$$

Итак, распределение осталось нормальным, но с удвоенной дисперсией  $D[\xi] = 4S\tau$ . В общем случае, для произвольного  $b$  получаем

$$p(\xi, b\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2Sb\tau)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2(2Sb\tau)}\right) \quad (5.7)$$

Таким образом, независимо от величины интервала  $b\tau$  между измерениями, приращения координаты частицы всегда представляют собой гауссовский случайный процесс с нулевым средним и дисперсией

$$D[\xi] = 2St, \quad t = b\tau \quad (5.8)$$

На рис. 7а показаны приращения того же самого процесса, что и на рис. 5а, но зафиксированные через интервалы  $b=4$ .

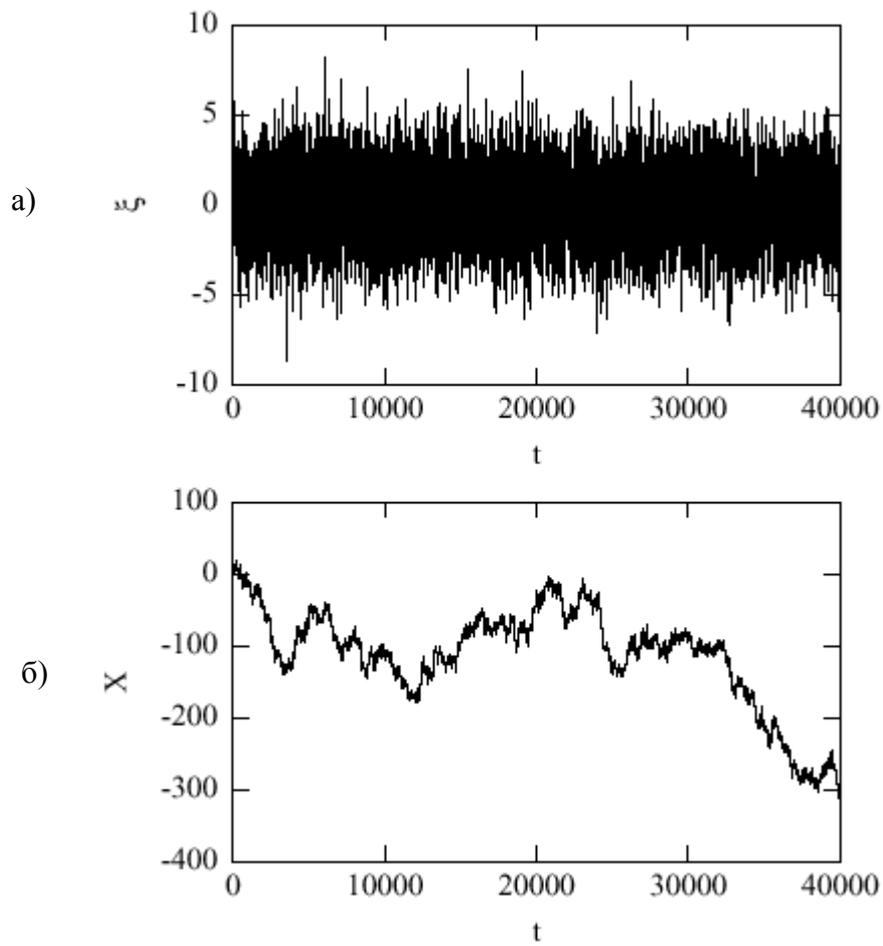


Рис. 7. Временная реализация случайной величины, обладающей стандартным гауссовским распределением с нулевым средним и дисперсией, причем наблюдения делаются через интервалы времени  $4\tau$  а) Независимые приращения координаты броуновской частицы; б) Зависимость координаты броуновской частицы от времени.

Можно заметить, что процессы на рис. 5б и рис. 7б похожи (за исключением масштаба по шкале ординат). Аналогично, случайная функция  $X(t)$  выглядит статистически одинаково на обоих графиках, что является проявлением свойства масштабной инвариантности БД. Это свойство может быть получено в явном виде заменой в (5.1)

$$\xi \rightarrow b^{1/2}\xi \text{ и } \tau \rightarrow b\tau, \quad (5.9)$$

т.е. на качественном уровне изменяя масштаб шкалы времени в фактор  $b$ , и масштаб шкалы значений приращений в фактор  $b^{1/2}$ . В результате данных преобразований приходим к следующему соотношению:

$$p(b^{1/2}\xi, b\tau) = b^{-1/2}p(\xi, \tau) \quad (5.10)$$

которое определяет свойство масштабной инвариантности (*самоафинности* в данном случае) плотности распределения приращений БД при преобразовании (5.9), которое, как мы уже упоминали раньше, называется *афинным* благодаря различным коэффициентам растяжения/сжатия осей времени и расстояния.

Плотность распределения приращений координаты  $X(t)$  броуновской частицы находится теми же методами, и мы получаем выражение

$$P(X(t) - X(t_0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2S|t - t_0|)}} \cdot \exp\left(-\frac{(X(t) - X(t_0))^2}{2(2S|t - t_0|)}\right), \quad (5.11)$$

которое удовлетворяет аналогичному масштабному соотношению

$$P(b^{1/2}(X(bt) - X(bt_0))) = b^{-1/2}P(X(t) - X(t_0)) \quad (5.12)$$

Зная плотность распределения, можно найти среднее значение и дисперсию процесса изменения координаты  $\Delta X = X(t) - X(t_0)$

$$M[\Delta X] = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X \cdot P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X = 0 \quad (5.13)$$

$$D[\Delta X] = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X^2 \cdot P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X = 2S|t - t_0| \quad (5.14)$$

здесь  $X(t_0)$  – положение частицы в некоторый начальный момент времени  $t_0$ .

Винер в 1923 г. ввел выражение для приращений БД, удовлетворяющее (5.11-5.14). Рассмотрим стандартный гауссовский случайный процесс  $\{\xi\}$ . Пусть приращение  $\Delta X$  координаты броуновской частицы задается выражением

$$X(t) - X(t_0) \sim \xi|t - t_0|^H \quad (5.15)$$

для любой пары моментов времени  $t$  и  $t_0$ . Здесь  $H=1/2$  для обычного броуновского движения. Таким образом,  $X(t)$  (при заданном  $X(t_0)$ ) можно найти, выбирая случайное число из гауссовского распределения, умножая его на инкремент времени  $|t - t_0|^H$  и прибавляя результат к  $X(t_0)$ . Данная процедура справедлива также для  $t < t_0$ . Как следует из (5.15) случайная функция  $X(t)$  имеет распределение, задаваемое (5.11).

Понятие *обобщенного (фрактального) броуновского движения* (ФБД) было введено Мандельбротом с помощью замены показателя  $H=1/2$  в (5.15) на

действительное число из интервала  $(0,1)$ . При этом результат обобщения обозначается  $B_H(t)$ . Приращения фрактального броуновского движения называются **фрактальным гауссовским шумом (ФГШ)** и, согласно (5.15), имеют нулевое среднее и дисперсию

$$D[B_H(t) - B_H(t_0)] = D[\xi] \cdot |t - t_0|^{2H} \quad (5.18)$$

Ковариация приращений для двух неперекрывающихся интервалов определяется соотношением

$$\begin{aligned} R(B(t_4) - B(t_3), B(t_2) - B(t_1)) &= \\ &= R(B(t_4), B(t_2)) - R(B(t_4), B(t_1)) - R(B(t_3), B(t_2)) + R(B(t_3), B(t_1)) = \\ &= \frac{D[\xi]}{2} \cdot ((t_4 - t_1)^{2H} - (t_3 - t_1)^{2H} + (t_3 - t_2)^{2H} - (t_4 - t_2)^{2H}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

В дискретном случае корреляционная функция последовательных приращений получается заменой в (5.19)  $t_1, t_2, t_3$ , и  $t_4$  на  $n, n+1, n+k$  и  $n+k+1$  соответственно и делением на  $D[\xi]$ :

$$r(k) = \frac{1}{2} [(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}] \quad (5.20)$$

ФГШ часто используется в качестве формальной математической модели сетевого трафика как самоподобного процесса. Конечно, такое приближение не имеет под собой четкой физической интерпретации, но позволяет лучше понять суть вопроса и сделать некоторые полезные выводы.

**Определение [1].** Гауссовский процесс  $X$  называется **фрактальным гауссовским шумом (ФГШ)** [fractional Gaussian noise] с параметром  $H$ , если его коэффициент корреляции<sup>1</sup>

$$r(k) = \frac{1}{2} [|k+1|^{2H} - |2k|^{2H} + |k-1|^{2H}], \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 < H < 1 \quad (5.21)$$

Можно показать, что

$$r(k) \sim H(2H-1) |k|^{-\beta}, \quad k \rightarrow \infty, \quad 0 < H < 1, \quad \beta = 2 - 2H, \quad (5.22)$$

а также, что усредненный процесс  $X^{(m)}$  имеет такое же распределение, как и процесс  $X$  для всех  $0 < H < 1$ . Таким образом, согласно (2.1) и (2.5), ФГШ

<sup>1</sup> В [3], [4] и др. данное выражение служит определением строго самоподобного процесса в широком смысле.

является строго самоподобным процессом в широком смысле при  $\frac{1}{2} < H < 1$ .

График АКФ ФГШ для различных значений параметра  $H$  приведен на рис. 8.

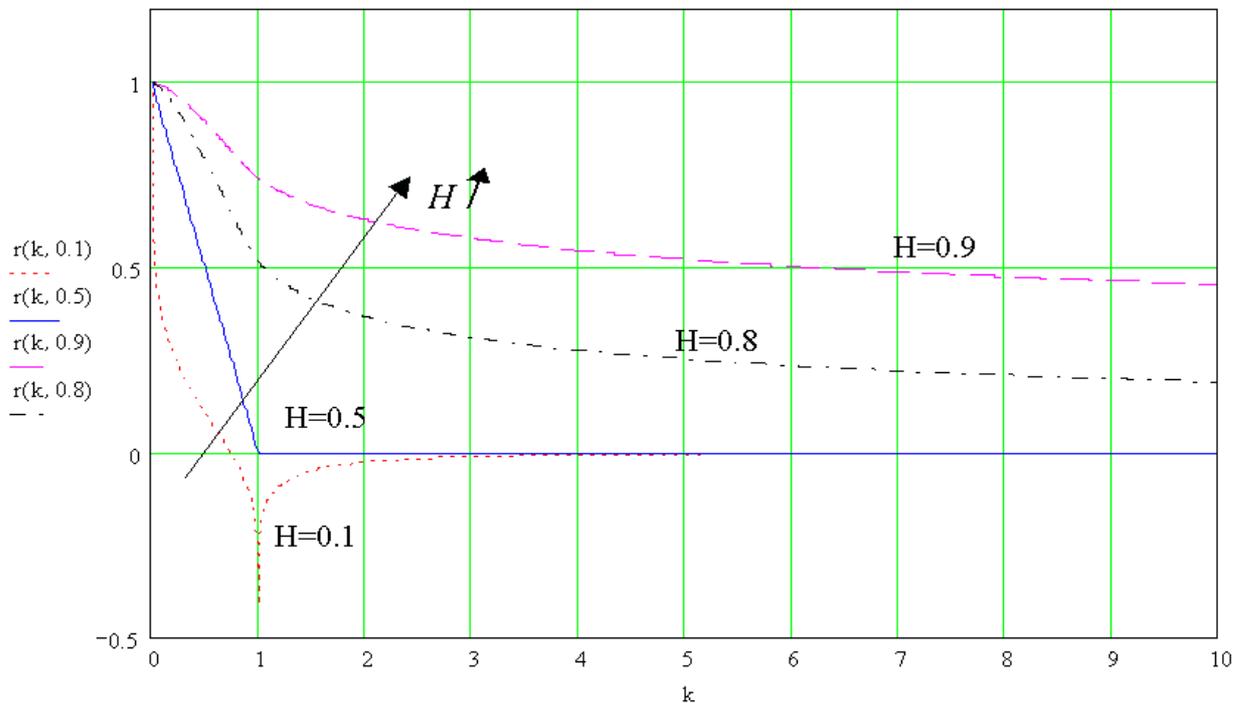


Рис. 8 АКФ фрактального гауссовского шума для различных значений параметра Хэрста.

Несмотря на свою четкую корреляционную структуру (5.21), ФГШ может рассматриваться как разумная первая аппроксимация более сложной структуры, так как если некоторые процессы с медленно убывающей зависимостью подвергнуть специальному виду центральной предельной теоремы, можно получить ФГШ.

Вместе с тем, ФБД и ФГШ предоставляют достаточно ограниченные возможности для описания реального сетевого трафика. Взять хотя бы для примера тот факт, что ФГШ и ФБД являются гауссовскими процессами, в то время как сетевой трафик положителен и, следовательно, не гауссовский процесс. Корреляционная структура (асимптотическое убывание) ФБД и ФГШ характеризуется всего лишь одним параметром, что также явно недостаточно для моделирования трафика, который может иметь совершенно иную кратковременную корреляционную зависимость.

Фрактальное броуновское движение  $B_H(t)$  также может быть получено из броуновского движения  $B(t)$  взятием интеграла:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + 0.5)} \int_{-\infty}^t (t - u)^{H-0.5} dB(u) \quad (5.23)$$

Здесь  $\Gamma(x)$  – гамма функция.

Таким образом, согласно (5.24), значение  $B_H(t)$  в момент времени  $t$  зависит от всех предыдущих ( $u < t$ ) приращений  $dB(u)$  простого броуновского движения. Алгоритм прогнозирования ФБД подробно рассматривается в [35].

Рассмотрим ниже два понятия, имеющие непосредственное отношение к самоподобным процессам: фрактальная размерность и коэффициент Хэрста, а также попробуем проследить их взаимосвязь.

## 6. Фрактальная размерность

Никто не может изгнать нас из рая,  
который создал нам Кантор.

Д. Гильберт

Как уже упоминалось, сетевой трафик относится к классу фрактальных процессов, обладающих свойством статистического самоподобия характеристик второго порядка, и, следовательно, может характеризоваться **фрактальной размерностью**. Дадим строгое определение этому понятию [8].

Известно, что длина кривой линии  $L_0$  в евклидовом пространстве определяется числом  $N(\delta)$  отрезков длины  $\delta$  прямой, необходимых для покрытия ее полностью. Мера  $L$  длины кривой можно ввести с помощью следующего соотношения:

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \cdot \delta = \frac{L_0}{\delta} \cdot \delta = L_0 \quad (6.1)$$

Как следует из (6.1), в пределе при уменьшении  $\delta$  мера  $L$  становится равной длине кривой  $L_0$ , и при этом ее значение не зависит от  $\delta$ . Формально, множеству точек, соответствующих рассматриваемой кривой, можно сопоставить другой измерительный элемент, например квадрат со стороной  $\delta$ .

Площадь такого измерительного элемента равна  $\delta^2$ . Если для покрытия кривой требуется  $N(\delta)$  квадратов, то результирующая мера (“площадь”) кривой будет равна

$$S = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \cdot \delta^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{N(\delta)}{\delta} \cdot \delta^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} L_0 \delta$$

При  $\delta \rightarrow 0$  величина  $S$  стремится к нулю. Поэтому, с практической точки зрения, единственной представляющей интерес мерой кривой является ее длина  $L$ , а не “площадь”  $S$ .

Аналогично, множеству точек, образующих площадь поверхности  $S_0$ , можно сопоставить меру площади

$$S = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \cdot \delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{S_0}{\delta^2} \cdot \delta^2 = S_0$$

С другой стороны, формально евклидовой поверхности  $S_0$  можно также поставить в соответствие какую-либо длину кривой, покрывающую эту поверхность

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \cdot \delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{S_0}{\delta^2} \cdot \delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{S_0}{\delta}$$

Однако при  $\delta \rightarrow 0$  такая мера поверхности расходится, т.е. для покрытия поверхности требуется кривая бесконечной длины.

Для общего случая меры можно записать

$$M = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \cdot \delta^\beta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{M_0}{\delta^D} \cdot \delta^\beta = \lim_{\delta \rightarrow 0} M_0 \cdot \delta^{\beta-D} \rightarrow \begin{cases} 0, \beta > D \\ \infty, \beta < D \end{cases} \quad (6.2)$$

где  $\beta$  – размерность выбранной меры.

Величина  $\beta=D$ , при которой  $M$  меняется скачком, рассматривается как **размерность Хаусдорфа**. Если  $\beta$  – не целое число, то соответствующая мера называется **фрактальной**.

Простейшим фрактальным и самоподобным объектом, который используется в качестве модели сложных процессов, является **множество Кантора (или Канторова пыль)**. Образующий элемент такого множества можно выбрать в виде единичного отрезка. Разделив этот отрезок на три части

и отбросив среднюю часть, получим два отрезка длины  $\zeta=1/3$ . Применяя многократно такую процедуру после  $k$ -го этапа разбиения, получим  $N=2^k$  отрезков, длиной  $\delta=(1/3)^k$  (см. рис. 10).



Рис. 10. Тριάдное Канторово множество.

Мера полученного в результате такой процедуры множества может быть вычислена с использованием (6.2)

$$M = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \cdot \delta^\beta \rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} 2^k (1/3)^{k\beta}$$

Такая мера не расходится и не стремится к нулю, если  $2^k (1/3)^{k\beta} = 1$ , отсюда  $D = \beta = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.631$ . Хотя топологическая размерность Канторова множества равна нулю, его размерность Хаусдорфа – дробная, следовательно, множество Кантора является фрактальным.

В теоретическом аспекте может быть интересным применение множества Кантора при моделировании сети с коммутацией пакетов как системы с потерями [8], [9].

## 7. Кто же он, этот парень, Хэрст?

Одна старуха от чрезмерного любопытства вывалилась из окна, упала и разбилась. Из окна высунулась другая старуха и стала смотреть на разбившуюся, но, от чрезмерного любопытства, тоже вывалилась из окна, упала и разбилась. Потом из окна вывалилась третья старуха, потом четвертая, потом пятая...

Д. Хармс. “Вываливающиеся старухи”

Гарольд Эдвин Хэрст был мальчиком из бедной семьи, который поступил в Оксфорд, хорошо учился и позже в 1906 году стал британским чиновником в Каире, где он участвовал в гидротехнических проектах на р. Нил. Следует заметить, что на протяжении столетий ежегодные разливы Нила были основой сельского хозяйства многих известных цивилизаций Африки. Хорошее орошение означало хороший урожай, в то время как малая вода приводила к недороду и нехватке продовольствия. Кроме того, ежегодно в долине реки на всей затопляемой территории откладывается плодородный слой красного аллювия, который придает красноватый оттенок водам Нила. Просмотрев летописи за 800 лет на предмет разливов Нила, Хэрст обнаружил, что существовала тенденция, когда за годом хорошего наводнения следовал еще один плодородный год, и, наоборот, за годом малой воды следовал еще один “голодный” год<sup>1</sup>. Другими словами, казалось, что появление голодных и плодородных лет – неслучайно. Для подтверждения данного факта, Хэрст ввел коэффициент  $0 < N < 1$ , который в его честь сейчас называется коэффициентом (экспонентой) Хэрста. В случае независимости друг от друга уровней ежегодных разливов, логично было бы представить процесс разливов обычным броуновским движением с независимыми приращениями, которое было рассмотрено ранее, при этом коэффициент Хэрста  $N=0.5$ . Однако, как обнаружил Хэрст, для Нила  $N=0.7$ .

---

<sup>1</sup> Позже Мандельброт для описания подобных явлений использовал термин “эффект Иосифа” по аналогии с семью годами Египетского изобилия, перемежающихся с семью годами голода в библейской истории Иосифа.

Одним из способов вычисления коэффициента  $H$  является анализ так называемой  $R/S$  статистики (нормированного размаха). Обозначим  $\xi$  – ежегодный уровень воды в Ниле, тогда средний уровень воды за  $\tau$  лет:

$$M[\xi] = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} \xi_i \quad (7.1)$$

Получим новый (кумулятивный) ряд, представляющий сумму за время  $t$  ежегодных колебаний уровня Нила относительно среднего  $M[\xi]$ :

$$X(t, \tau) = \sum_{i=1}^t (\xi_i - M[\xi]), \quad 1 \leq t \leq \tau \quad (7.2)$$

При этом диапазон между максимальным и минимальным значением  $X(t, \tau)$  за время  $\tau$  обозначается  $R(\tau)$ :

$$R(\tau) = \max(X(t, \tau)) - \min(X(t, \tau)), \quad 1 \leq t \leq \tau \quad (7.3)$$

Тогда  $R/S$  статистика определяется безразмерным отношением диапазона  $R(\tau)$  к стандартному отклонению  $S$ :

$$R/S = \frac{R(\tau)}{S(\tau)} = \frac{R(\tau)}{\sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} (\xi_i - M[\xi])^2}}. \quad (7.4)$$

Хэрст показал, что для многих природных явлений справедлива зависимость:

$$M \left[ \frac{R(\tau)}{S(\tau)} \right] \sim c\tau^H, \quad \tau \rightarrow \infty \quad (7.5)$$

где  $c$  – положительная константа, не зависящая от  $\tau$ .

В частности, если приращения исследуемого временного ряда (7.3) независимы, т.е. ряд представляет собой БД с независимыми приращениями, то, как уже упоминалось ранее, коэффициент Хэрста в (7.5)  $H=0.5$ . Однако Хэрст обнаружил для Нила  $H \approx 0.7$ , что подтверждало присутствие некоторой зависимости между последовательными отсчетами  $\xi_i$  и  $\xi_{i+1}$ !

Следует заметить, в случае  $0.5 < H < 1$  говорят о **персистентном** (поддерживающемся) поведении процесса либо о том, что процесс обладает **длительной памятью**. Другими словами, если в течение некоторого времени в прошлом наблюдались положительные приращения процесса, то есть

происходило увеличение, то и впредь в среднем будет происходить увеличение. Иначе говоря, вероятность того, что процесс на  $i+1$  шаге отклоняется от среднего в том же направлении, что и на  $i$  шаге настолько велика, насколько параметр  $H$  близок к 1. Т.е. персистентные стохастические процессы обнаруживают четко выраженные тенденции изменения при относительно малом “шуме”.

В случае  $0 < H < 0.5$  говорят о *антиперсистентности* процесса. Здесь высокие значения процесса следуют за низкими, и наоборот. Другими словами, вероятность того, что  $i+1$  шаге процесс отклоняется от среднего в противоположном направлении (по отношению к отклонению на  $i$  шаге) настолько велика, насколько параметр  $H$  близок к 0.

При  $H=0.5$  отклонения процесса от среднего являются действительно случайными и не зависят от предыдущих значений, что соответствует случаю БД.

Заметим, что именно свойство персистентности оправдывает применение для моделирования и предсказания самоподобных рядов AR (авторегрессионных) моделей вида

$$X_n = \varphi_0 + \sum_{r=1}^p \varphi_r \cdot X_{n-r} + \varepsilon_n \quad (7.6)$$

где  $\varphi_i$  – константы,  $\varepsilon_n$  – некоррелированные случайные переменные (белый шум) с нулевым средним. Выражение (7.6) показывает, как, зная прошлое процесса, предсказать его будущее. В частности, получили широкое распространение такие авторегрессионные модели, как ARMA (процесс скользящего среднего), ARIMA (интегральный процесс скользящего среднего) и FARIMA (фрактальный интегральный процесс скользящего среднего).

Свойство длительной памяти характерно для половодий Нила [12], сетевого трафика [1], процессов, происходящих на финансовых рынках [11], [15], [19] и пр.

Соотношение (7.5) может использоваться для оценки коэффициента  $H$  по временному ряду. Для этого необходимо прологарифмировать обе части (7.5)

$$\log\left(M\left[\frac{R(\tau)}{S(\tau)}\right]\right) \sim H \log(\tau) + \log c, \quad \tau \rightarrow \infty \quad (7.7)$$

и построить график зависимости  $\log\left(M\left[\frac{R(\tau)}{S(\tau)}\right]\right)$  от  $\log(\tau)$ . Наклон прямой, аппроксимирующей данную зависимость, и есть экспонента  $H$ , характеризующая исследуемый временной ряд.

Для оценки параметра Хэрста временного ряда существует множество методов: R/S статистика, анализ графика изменения дисперсии (согласно (3.2)), оценка Виттла, вейвлет-анализ, анализ индекса дисперсии и пр. С ними можно познакомиться например в [13].

## **8. Связь между фрактальной размерностью и коэффициентом Хэрста.**

Фрактальная размерность  $D$  может рассматривать как мера неровности, изрезанности поверхности объекта при  $D \in [n, n + 1)$  для поверхности в  $n$ -размерном пространстве, причем более неровные, “шероховатые” поверхности соответствуют более высоким значениям  $D$ . Эффект Хэрста характеризует длительную память, или персистентность процесса. В принципе, фрактальная размерность и коэффициент Хэрста могут рассматриваться независимо друг от друга: фрактальная размерность характеризует локальное свойство, а длительная память – глобальная характеристика всего процесса. Тем не менее, в научной литературе эти понятия тесно связаны, главным образом, благодаря фрактальному гауссовскому шуму и фрактальному броуновскому движению, которые проявляют оба свойства.

Итак, для самоподобного процесса локальные свойства отражаются на глобальных в соответствии со знаменитым соотношением

$$D = n + 1 - H \quad (8.1)$$

между фрактальной размерностью и коэффициентом Хэрста для самоподобного объекта в  $n$ -мерном пространстве [5]. Для временного ряда  $n=1$ , и, соответственно,

$$D = 2 - H \quad (8.2)$$

Поэтому свойство медленно убывающей зависимости, ассоциирующейся с  $0.5 < H < 1$ , соответствует низкой фрактальной размерности. Случай “шероховатой” поверхности, обладающей высокой фрактальной размерностью, соответствуют **антиперсистентному** процессу с  $0 < H < 0.5$  (см. рис. 11).

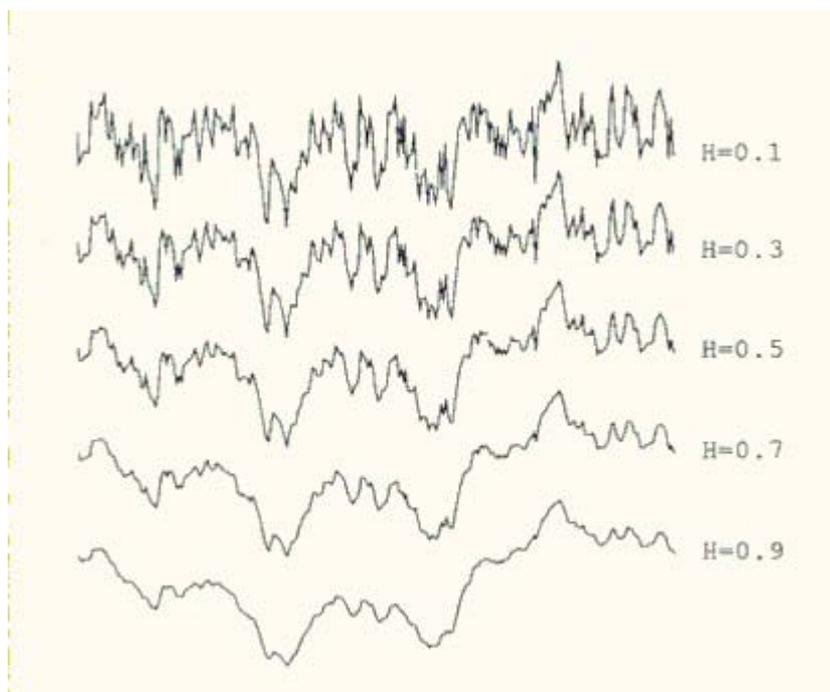


Рис.11. Характерные реализации временной последовательности для различных значений параметра Хэрста. (Из “*Algorithms for random fractals*”, Dietmar Saure, Chapter 2 of *The Science of Fractal Images* by Barnsley et al, Springer-Verlag, 1988)

Рассмотрим в качестве примера стационарный в широком смысле случайный процесс  $X$  с нулевым средним и дисперсией, равной единице. Поведение корреляционной функции данного процесса характеризует локальные свойства реализации, т.е. если выполняется соотношение

$$1 - r(k) \sim |k|^\alpha \quad \text{при} \quad k \rightarrow 0, \quad (8.3)$$

где  $\alpha \in (0, 2]$ , то реализация случайного процесса имеет фрактальную размерность

$$D = n + 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (8.4)$$

Если процесс  $X$  при этом обладает персистенностью (или МУЗ), то он характеризуется ранее рассмотренным поведением корреляционной функции

$$r(k) \sim |k|^{-\beta} \quad \text{при} \quad |k| \rightarrow \infty \quad (8.5)$$

где  $\beta \in (0,2)$ , с учетом взаимосвязи с коэффициентом Хэрста

$$H = 1 - \frac{\beta}{2} \quad \text{и} \quad \beta = 2 - 2H \quad (8.6)$$

Для фрактального гауссовского шума – классического стационарного самоподобного стохастического процесса, рассмотренного ранее, корреляционная функция которого удовлетворяет (5.21)

$$r(k) = \frac{1}{2} [ |k+1|^{2H} - |2k|^{2H} + |k-1|^{2H} ], \quad k \in \mathbb{N}.$$

можно показать, что

$$r(k) \sim H(2H - 1) |k|^{-(2-2H)}, \quad |k| \rightarrow \infty,$$

и

$$1 - r(k) \sim |k|^{2H}, \quad |k| \rightarrow 0 \quad (8.7)$$

сравнивая (8.3) и (8.7) заключаем, что соотношение (8.4) выполняется при  $n=1$ .

Таким образом, предположение самоподобия процесса  $X$  (в условиях отождествления его с ФГШ) определяет взаимосвязь между фрактальной размерностью и коэффициентом Хэрста (или локальным и глобальным поведением) процесса. Вместе с тем, для не самоподобных процессов соотношение (8.4) может не выполняться и, следовательно, параметры  $H$  и  $D$  могут в таком случае меняться независимо [5].

## 9. Тяжесть хвостов

Я постирал на завтра свои носки,  
я предполагаю, что буду живой...

Ю.Шевчук "Styx"

Многочисленные измерения сетевого трафика показали, что он лучше всего описывается так называемыми распределениями с "тяжелыми хвостами" (РТХ). Для начала дадим несколько определений и рассмотрим наиболее характерные случаи [20].

**Определение.** Считается, что случайная переменная  $Z$  имеет *распределение с тяжелым хвостом*, если

$$P[Z > x] \sim c \cdot x^{-a}, x \rightarrow \infty \quad (9.1)$$

где  $0 < a < 2$  и называется параметром формы,  $c$  – некоторая положительная константа. В отличие от распределений с легкими хвостами (РЛХ), такими как экспоненциальное или гауссовское, которые имеют экспоненциальное убывание хвоста, РТХ обладают хвостами, спадающими по степенному (гиперболическому) закону. При  $0 < a < 2$  РТХ имеют бесконечную дисперсию, а при  $0 < a \leq 1$  еще и обладают бесконечным средним. В случае сети особо интересным является случай  $1 < a < 2$ .

Среди РТХ наиболее часто используется распределение Парето с функцией распределения:

$$P[Z \leq x] = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a, \quad b \leq x \quad (9.2)$$

Основное свойство случайной величины, распределенной в соответствии с РТХ, состоит в том, что она проявляет высокую изменчивость. Т.е. выборка из РТХ представляет собой большей частью относительно небольшие значения, однако также содержит и достаточное количество очень больших значений. Не удивительно, что при  $a \rightarrow 1$  влияние тяжелого хвоста отражается на выборке спадом сходимости выборочного среднего к математическому ожиданию. Например, при размере выборки  $m$ , выборочное среднее  $\bar{Z}_m$  Парето распределенной случайной величины может значительно отклоняться от

математического ожидания, часто недооценивая его. Фактически, модуль ошибки  $|\overline{Z}_m - M[Z]|$  ведет себя, как  $m^{(1/a)-1}$ , и поэтому для значений  $a$ , близких к 1, следует заботиться о том, что выводы о сетевой производительности, связанные с ошибкой выборки, будут неверными.

Можно показать, что тяжелые хвосты распределения тесно связаны с понятием длительной памяти и МУЗ процесса. Рассмотрим предсказуемость некоторой случайной величины, обладающей РТХ.

Пусть  $Z$  – случайная величина, обладающая РТХ и интерпретируемая как время жизни (продолжительность) сетевого соединения (ТСР-сессии, например). Предположим, что соединение было активно в течение некоторого времени  $\tau > 0$ . Для упрощения выкладок сделаем время дискретным  $t \in Z_+$ , и введем индикаторную функцию  $A: Z_+ \rightarrow \{0;1\}$ , такую что  $A(t) = 1$  только в том случае, когда  $Z(t) \geq t$ . Тогда условная вероятность  $P$  того, что соединение, поддерживающее активность в течение времени  $1 \leq t \leq \tau$ , будет существовать в будущем, оценивается как

$$L(\tau) = P\{A(\tau + 1) = 1 \mid A(t) = 1\}, \quad (9.3)$$

которая также может быть представлена в виде

$$L(t) = 1 - \frac{P\{Z = \tau\}}{P\{Z \geq \tau\}} \quad (9.4)$$

Вычислим для начала  $L(t)$  для случая легких хвостов, в частности для распределения с экспоненциальными хвостами  $P\{Z > x\} \sim c_1 e^{-c_2 x}$ , где  $c_1, c_2 > 0$  – константы. Второй член в (X4) вычисляется как

$$\frac{P\{Z = \tau\}}{P\{Z \geq \tau\}} \sim \frac{c_1 e^{-c_2 \tau} - c_1 e^{-c_2(\tau+1)}}{c_1 e^{-c_2 \tau}} = 1 - e^{-c_2}. \quad (9.5)$$

Для больших  $\tau$  получаем  $L(\tau) \sim e^{-c_2}$ . Т.е. в случае экспоненциально легких хвостов продолжительность активности соединения не оказывает влияния на прогноз. Для тяжелых хвостов аналогичные вычисления приводят к

$$\frac{P\{Z = \tau\}}{P\{Z \geq \tau\}} \sim \frac{c \cdot \tau^{-a} - c(\tau + 1)^{-a}}{c \cdot \tau^{-a}} = 1 - \left(\frac{\tau}{\tau + 1}\right)^a, \quad (9.6)$$

что означает

$$L(\tau) \rightarrow 1, \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty. \quad (9.7)$$

Таким образом, чем больше период наблюдаемой активности соединения, тем выше вероятность, что соединение продолжит существовать в будущем. Т.е. процесс обладает персистентностью. Можно обобщить данный результат на случай предсказания активности на  $\delta > 1$  шагов в будущее, то есть

$$L(\tau) = P\{A(\tau + s) = 1 \mid A(t) = 1\}, \quad (9.8)$$

где  $1 \leq s \leq \delta$  и  $1 \leq t \leq \tau$ . Для легких хвостов получаем  $L(\tau) \sim e^{-c_2 \delta}$ , что качественно не меняет выводы для данного случая. Для тяжелых хвостов  $L(\tau)$  ведет себя как  $(1 + \delta/\tau)^{-a}$ , и, следовательно, при достаточно больших  $\tau$  ошибка предсказания может быть сколь угодно малой.

## 10. Самоподобие сетевого трафика. Реалии.

Для того чтобы представить себе особенности, возникающие в реальной сети вследствие эффекта самоподобия, рассмотрим механизм статистического мультиплексирования информационных потоков.

Алгоритм статистического мультиплексирования потоков широко используется в телекоммуникациях, поскольку позволяет экономно использовать пропускную способность магистральных каналов. Рассмотрим простейший пример передачи информации многих источников по одному магистральному каналу. В принципе, можно закрепить за каждым из источников определенную часть ресурсов магистрального канала (скажем, разделить источники по частоте). В этом случае каждый источник может использовать только ту часть ресурсов, которая ему отведена (см. рис. 12 слева). Другой способ передачи, называемый статистическим мультиплексированием, состоит в том, что потоки отдельных источников складываются (агрегируются) в магистральном канале с экономией пропускной способности  $dC$  (см. рис. 12 справа).

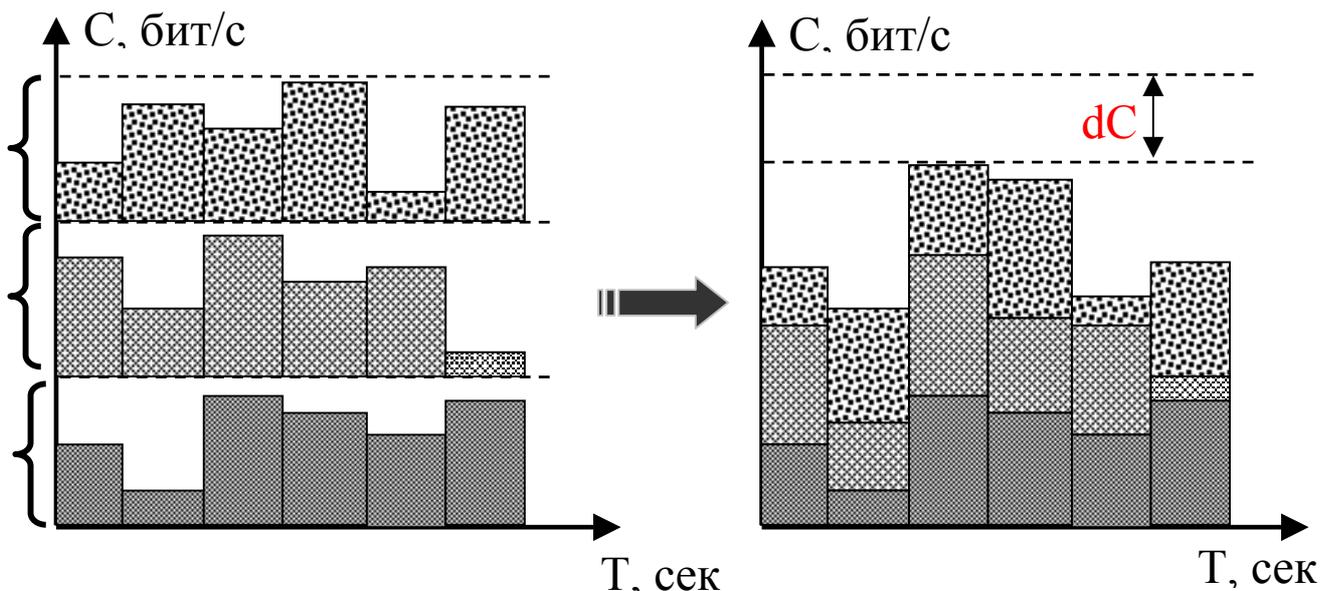


Рис. 12. К пояснению работы алгоритма статистического мультиплексирования. Слева показаны трафики трех отдельных источников при жестком разделении полосы магистрали между ними. Справа – трафики тех же источников в магистральном канале при работе алгоритма статистического мультиплексирования. При этом достигается выигрыш в полосе  $dC$ .

Рассмотрим второй вариант более подробно. Допустим, имеются  $n$  отдельных (парциальных) источников. Пусть процессы (см. рис. 13)  $\xi_1(M[\xi_1], D[\xi_1]), \dots, \xi_n(M[\xi_n], D[\xi_n])$  имеют одинаковые средние  $M[\xi_i] = \mu$  и дисперсии  $D[\xi_i] = \sigma^2$ , тогда при условии независимости и одинаковом распределении  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  коэффициент вариации результирующего процесса  $\xi_\Sigma$  в магистральном канале:

$$\text{cov}(\xi_\Sigma) = \frac{\sqrt{D[\xi_\Sigma]}}{M[\xi_\Sigma]} = \frac{\sqrt{D[\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n]}}{M[\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n]} = \frac{\sqrt{n \cdot D[\xi_i]}}{n \cdot M[\xi_i]} = \frac{\sigma}{\mu\sqrt{n}} \quad (10.1)$$

Как видно из (10.1), коэффициент вариации представляет собой отношение среднеквадратического отклонения процесса к его среднему. В данном случае коэффициент вариации отражает степень сглаживания результирующего процесса  $\xi_\Sigma$  при увеличении количества мультиплексируемых парциальных процессов. Эффект зрительного сглаживания процесса  $\xi_\Sigma$  при росте  $n$  достигается благодаря более быстрому росту среднего процесса  $\xi_\Sigma$  по

сравнению с его среднеквадратическим отклонением (СКО). Принципиально, что среднее сравнивается с СКО, а не с дисперсией. Это делается для получения безразмерной оценки степени сглаженности (коэффициента вариации в данном случае).

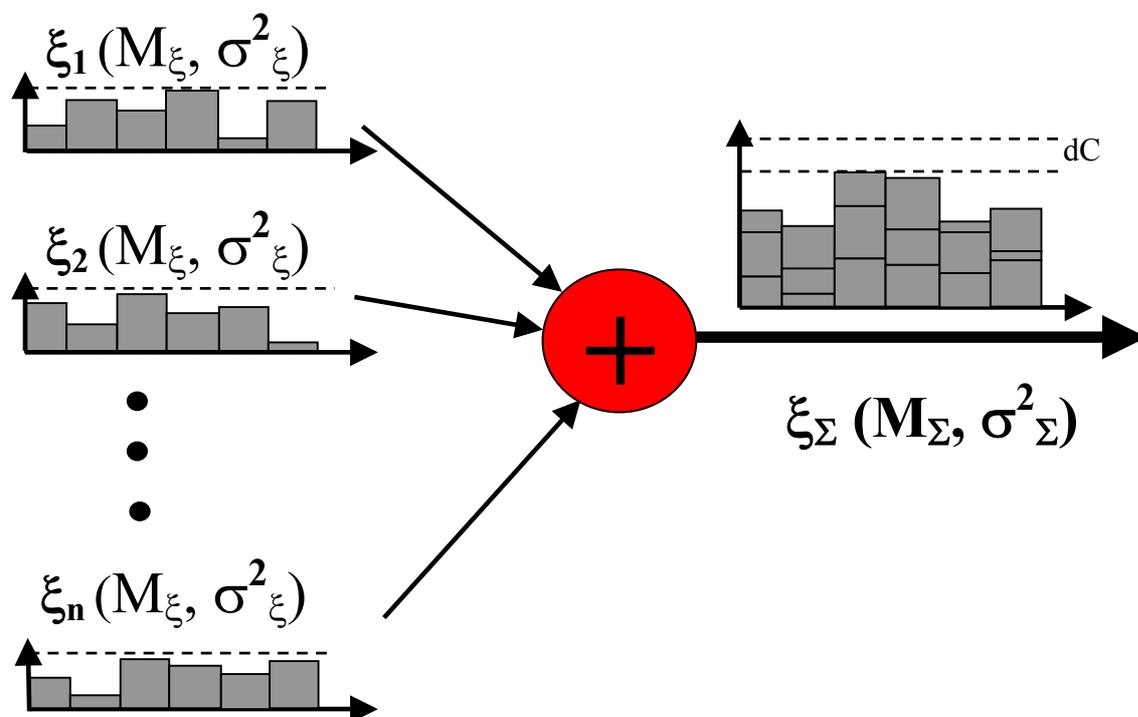


Рис. 13. Схема статистического мультиплексирования  $\xi_1(M[\xi_1], D[\xi_1]), \dots, \xi_n(M[\xi_n], D[\xi_n])$  с получением в магистральном канале процесса  $\xi_\Sigma$ .

Более того, в соответствии с центральной предельной теоремой (ЦПТ) при увеличении  $n$  должна также происходить нормализация процесса  $\xi_\Sigma$ .

Обратим внимание, что сглаживание происходит в независимости от степени самоподобия парциальных потоков. Другими словами, процесс в магистральном канале настолько хэрстный, насколько хэрстны парциальные потоки, но при этом более сглаженный [2].

Однако на практике чаще всего ресурсы магистрального канала (полоса, буферы) много меньше, чем суммарная потенциальная возможность мультиплексируемых процессов, что определяет эффективность системы [34]. Как результат – парциальные потоки при сложении в ограниченном буфере, например, теряют независимость. Эффекты, которые могут возникать при

мультиплексировании зависимых потоков подробно рассмотрены в [7]. В частности, эксперимент показал, что уже при  $n=10...15$  (и при работе широко распространенной реализации *Reno* протокола *TCP*) формула (10.1) дает погрешности, а при  $n=60$  реально измеренный  $\text{cov}(\xi_\Sigma)$  больше рассчитанного по данной формуле на 300% (см. рис. 14)!

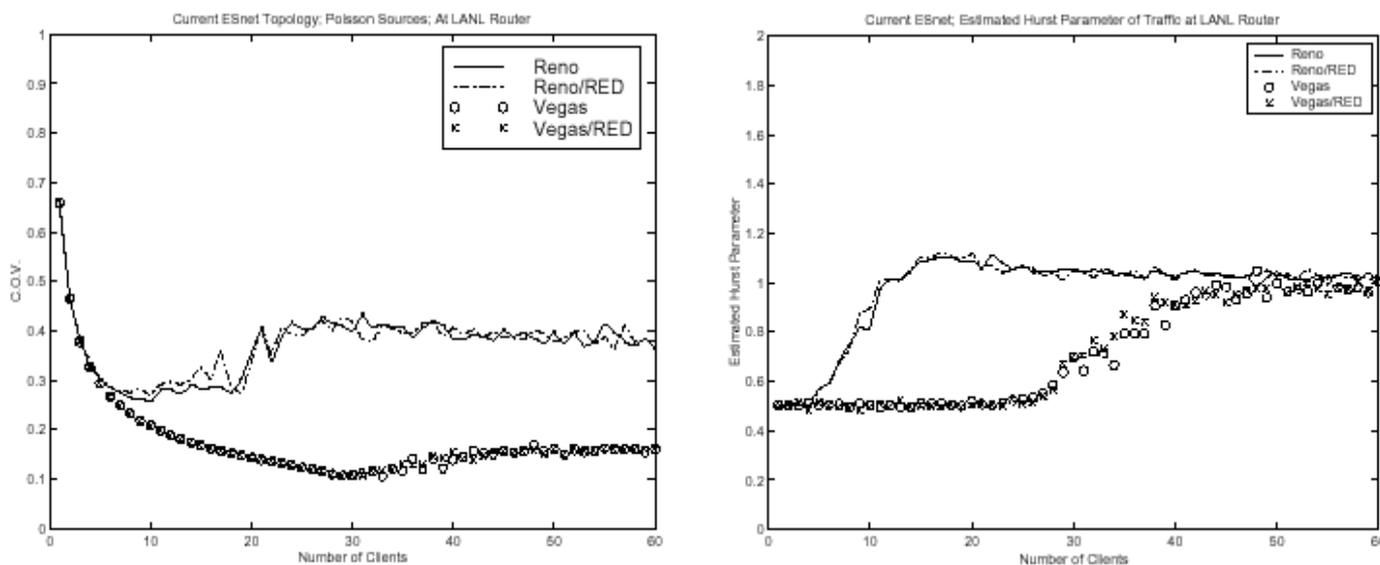


Рис. 14. Слева – зависимость коэффициента вариации магистрального потока от числа клиентов (мультиплексируемых потоков). Справа – зависимость величины показателя Хэрста от числа клиентов. В обоих случаях приведены графики для версий протокола *TCP* (*Reno*, *Vegas*), функционирующих в исследуемой сети.

Примечательно, что степень зависимости парциальных потоков зависит от версии протокола сетевого уровня *TCP*, функционирующей в сети. Действительно (см. рис. 14), при работе версии *Vegas* коэффициент вариации  $\xi_\Sigma$  уменьшается при увеличении  $n$  до 30 (в отличие от более распространенной версии *Reno*). Далее, видимо, мультиплексируемые потоки утрачивают независимость. Характерно, что при этом показатель Хэрста процесса  $\xi_\Sigma$ , увеличиваясь от 0.5 до 1 в точке  $n=15$  для *Reno* и в точке  $n=30$  для *Vegas*. Можно сделать вывод, что, по мере того как входные процессы теряют независимость, процесс на выходе становится все более персистентным. В результате агрегированный процесс не достигает расчетной (10.1) степени

сглаживания, и алгоритм статистического мультиплексирования оказывается малоэффективным.

Типичный вид агрегированного сетевого трафика показан на рис. 15.

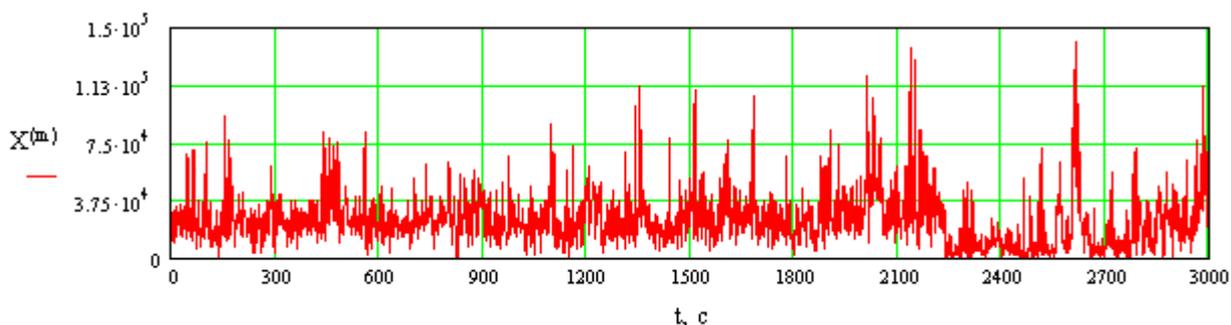


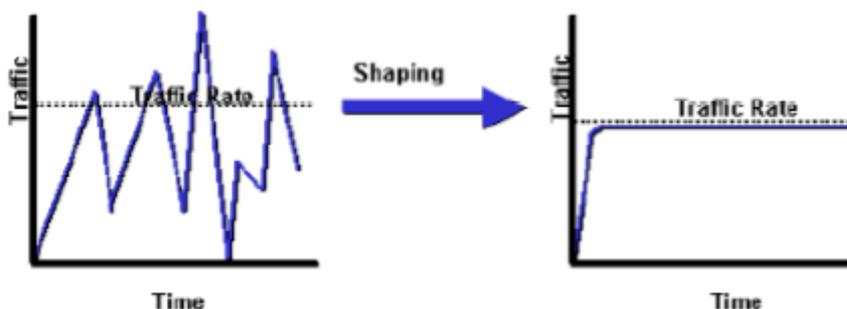
Рис. 15. Усредненная по блокам длины  $m = 1$  сек. реализация  $|b|pkt-5$  [22].

Каждая точка на данном графике представляет собой количество байт, переданных в магистральном канале за интервал времени в 1 секунду. Длительность реализации составляет 3000 точек или 50 минут. Коэффициент Хэрста соответствует примерно 0.8. Как видно из рисунка, процесс имеет высокую изменчивость (поскольку подчиняется распределению с тяжелым хвостом) и его вряд ли можно назвать сглаженным. Как результат, для того чтобы передать такой трафик без потерь, пропускная способность канала должна соответствовать уровню пиковых выбросов, т.е. в данном случае быть не менее  $1.4 \cdot 10^5$  Бит/с. Можно заметить, поскольку средний уровень трафика все-таки достаточно низкий, пропускная способность будет расходоваться неэффективно. Другими словами, коэффициент использования такого канала будет низким.

Для управления интенсивностью передаваемого по сети трафика компания Cisco Systems, признанный лидер в области телекоммуникаций, в настоящее время рекомендует использовать механизмы Traffic Shaping (TS) и Traffic Policing (TP) [23], [24]. Суть данных алгоритмов, как следует из рис.16, заключается в следующем: TS сглаживает трафик и пересылает его с постоянной интенсивностью (согласованной скоростью передачи) путем

постановки в очередь (буферизации) пакетов, интенсивность передачи которых превысила среднее значение;

- **traffic-shaping**



- **traffic-policing**

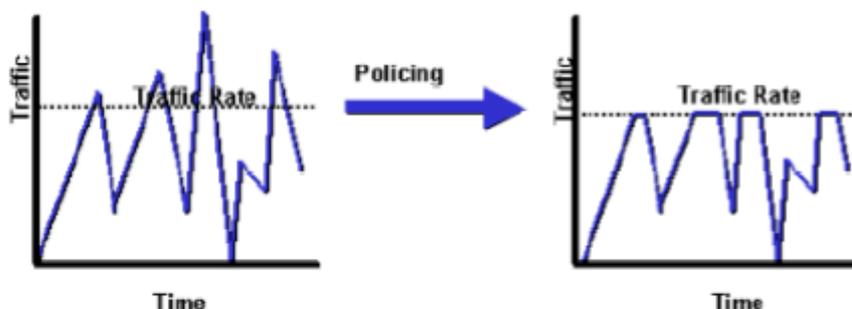


Рис. 16. Принципы работы механизмов ограничения трафика от Cisco Systems.

механизм TP в свою очередь просто отбрасывает пакеты, интенсивность которых выше согласованной скорости передачи. С одной стороны, так как TS не допускает отбрасывания пакетов, это делает его привлекательным для управления передачей информации реального времени (голос, реальное видео). С другой стороны он вносит задержки, связанные с буферизацией, что отрицательно сказывается на характеристиках передаваемого трафика.

С развитием направления самоподобия все больше появляется работ по предсказанию интенсивности трафика [25], [26], [29], [30], [31]. Возможность осуществлять прогнозы, как уже упоминалось выше, обязана свойству длительной памяти процессов и теоретически должна обеспечить повышение

коэффициента использования канала и общей эффективности системы (см. рис. 17).

- **traffic-prediction**

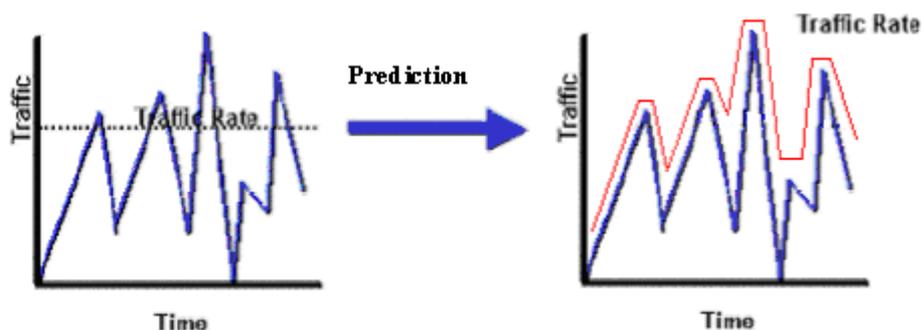


Рис.17. Возможный вариант работы алгоритма предсказания трафика.

В разделе 9 была показана принципиальная возможность предсказания будущего процесса, удовлетворяющего распределению с тяжелыми хвостами. Более детальная информация о прогнозируемости трафика содержится в работе [20]. Там же представлена зависимость средней энтропии  $S$  трафика от длины интервала времени, на котором он исследуется. По данной зависимости теоретически можно оценить время, требующееся на наблюдение трафика, прежде чем сделать выводы о его будущем с приемлемой степенью достоверности.

## 11. От фрактальности и самоподобия к хаосу

Я говорю вам: нужно носить в себе еще хаос, чтобы быть в состоянии родить танцующую звезду.

Ф. Ницше “Так говорил Заратустра”

Достаточно интересная в теоретическом аспекте работа была выполнена в 2000 г. Andras Veres и Miklos Voda из Ericsson Research [16], в которой с помощью имитационного моделирования на симуляторе ns-2 [21] показано, что трафик протокола TCP (использовалась версия TCP Tahoe) может быть как

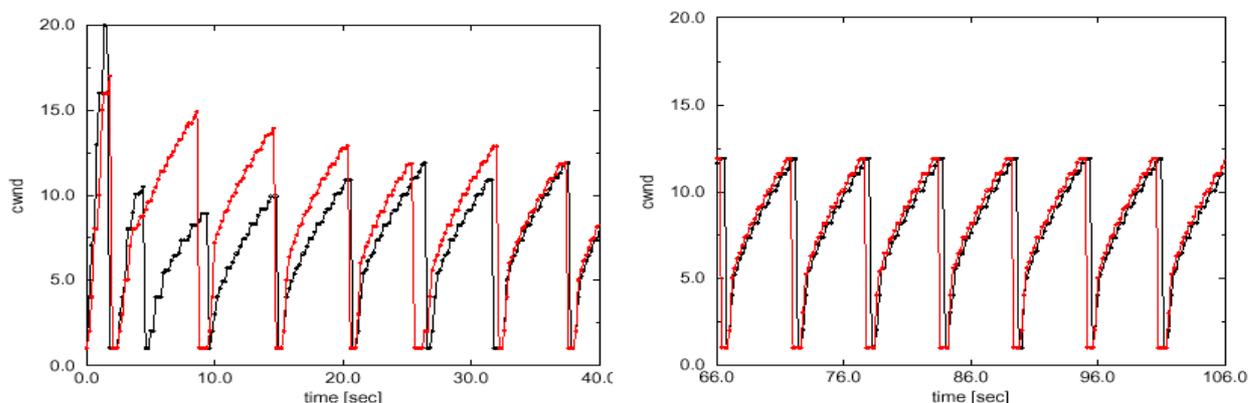
простым периодическим процессом, так и при некоторых условиях обладать сложным поведением, согласующимся с понятием *детерминированного хаоса*.

Приведем и обсудим основные результаты данной работы.

Простое периодическое поведение было исследовано для конфигурации сети, в которой две TCP сессии одновременно работают по одному и тому же соединению. Параметры соединения были выбраны следующие:

- скорость  $C = 0.2$  Мбит/с;
- задержка  $d = 10$  мс;
- размер буфера  $B = 20$  пакетов.

Обе сессии запускаются одновременно и после короткого переходного процесса устанавливаются в периодические колебания, одно из которых всегда впереди другого, но оба следуют одним и тем же фазам: медленному старту, избеганию перегрузки и возврату. Это хорошо видно на рис.18. Здесь представлен процесс изменения окна перегрузки (cwnd) TCP сессий во времени



а) фаза переходного процесса;

б) после того, как закончился переходной процесс

Рис.18. Окна перегрузки двух TCP сессий, одновременно работающих по одному соединению

Этот график также обнаруживает, что обе сессии синхронизированы. Они двигаются вдоль “лестницы”: увеличивают свои cwnd один за другим, на вершине лестницы обнаруживаются потери и обе сессии уменьшают свои окна до одного пакета, далее этот процесс повторяется.

При изменении параметров соединения была снова получена периодичность, но более сложная (см. рис. 19).

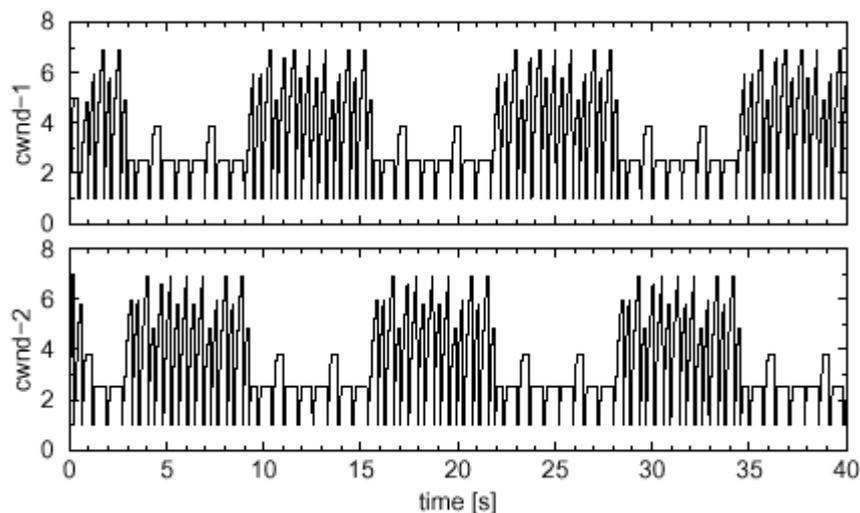


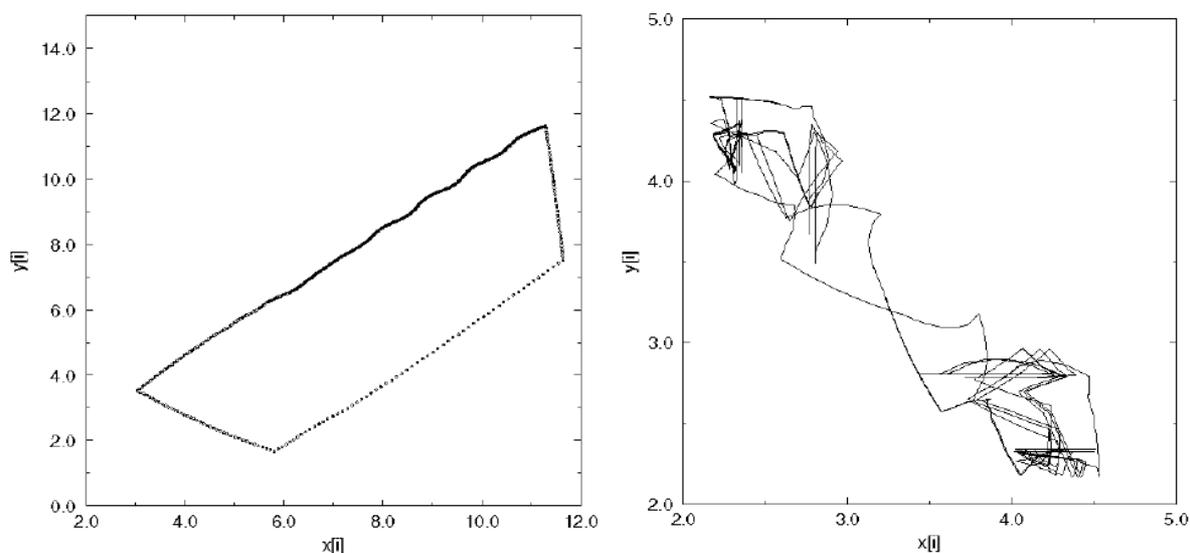
Рис.19. Окна перегрузки двух TCP сессий.  $C=0.5$  Мбит/с,  $d=10$ мс,  $V=4$  пакета.

В основе все еще лежат регулярные удары, но на больших масштабах времени существуют перемежающиеся части (сначала одна сессия выигрывает в скорости, а затем другая берет верх). Изменяя таким образом параметры, можно получить еще более сложные реализации.

Можно наблюдать эволюцию системы не только как функцию времени, но и как траекторию системы в фазовом пространстве, сделав соответствующие построения. Фазовое пространство – многомерное пространство, где каждое измерение соответствует определенной системной переменной, таким образом, каждая точка в фазовом пространстве соответствует уникальному состоянию системы. Если система периодична, то отвечающая ей траектория в фазовом пространстве будет петля, и наоборот – если эволюция системы может быть представлена петлей в фазовом пространстве, то система – периодична.

На рис. 20 представлены траектории на фазовой плоскости для простой и более сложной (перемежающейся) периодических систем, обсуждаемых выше. Обе системы представляются замкнутыми петлями, что есть признак периодичности, но уровень сложности этих петель весьма разный: простая

система характеризуется простой петлей, в то время как “перемежающаяся” система имеет более сложную, но более симметричную траекторию.



а)  $C=0.2$  Мбит/с,  $d=10$ мс,  $V=20$  пакетов,  $n=100$ .

б)  $C=0.5$  Мбит/с,  $d=10$ мс,  $V=4$  пакетов,  $n=90$ .

Рис.20. Периодические аттракторы двух TCP сессий.

Несмотря на различную сложность, обе траектории доказывают свою высокую устойчивость. Это означает, что не имеет значения, каким образом мы возбуждаем систему (например, случайными потерями пакетов или, изменяя начальные условия, например, запускаем вторую сессию TCP на несколько секунд позже) в конце концов, система вновь вернется к тем же регулярным траекториям. В теории динамических систем эти траектории называются **аттракторами**. Аттрактор – предельное множество траекторий в фазовом пространстве системы, к которому стремятся все траектории из некоторой окрестности этого множества [32]. Если это предельное множество есть устойчивое состояние равновесия – аттрактор системы будет просто неподвижной точкой, если это устойчивое периодическое движение – аттрактором будет замкнутая кривая, называемая также предельным циклом. Режим детерминированного хаоса также характеризуется аттрактором, но траектория такого аттрактора непериодическая (не замыкается) и режим функционирования неустойчив (малые отклонения от начальных условий

нарастают экспоненциально). С легкой руки математика Ф.Тakensа такие аттракторы стали называть *“странными”*.

Итак, для одного набора значений параметров (например, количество конкурирующих TCP сессий, скорость, размеры буферов, задержки передачи) поведение система выглядит просто, для другого – очень сложно. Не трудно подыскать параметры, для которых кажется, что система не повторит себя никогда. Конечно, так как система имеет конечную размерность, траектории всегда будут периодическими, но размер этого периода – очень большой. Аттрактор данной системы показан на рис. 21.

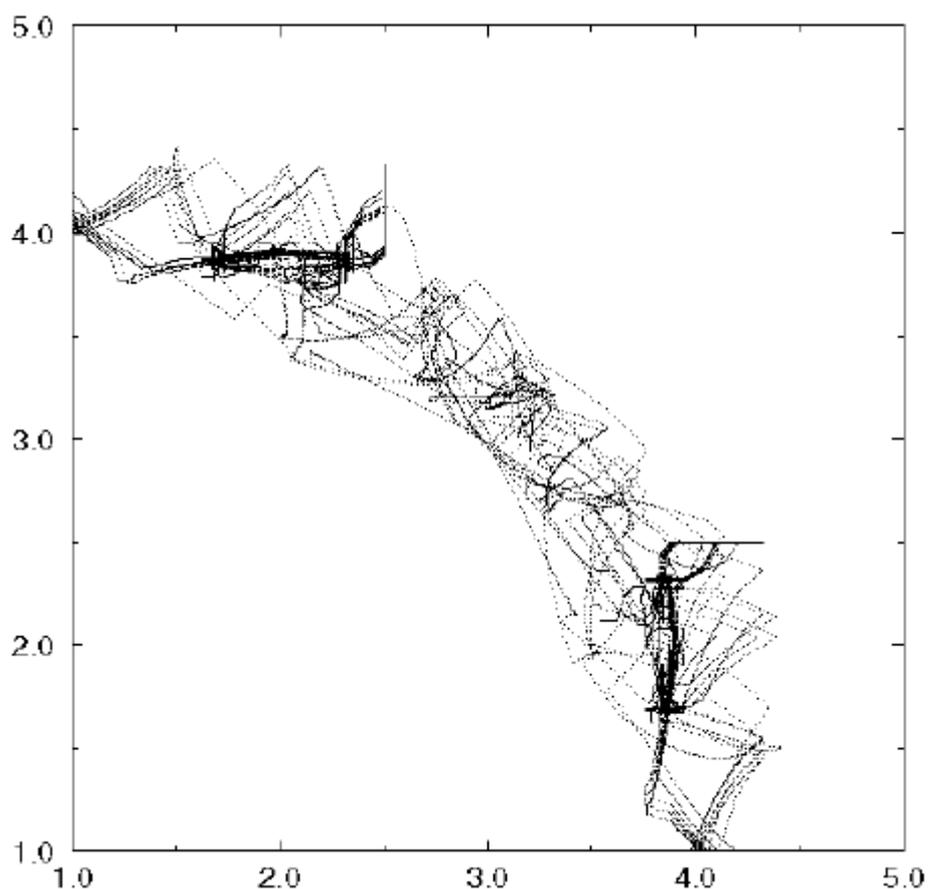


Рис.21. “Странный” аттрактор.  $C=0.1$  Мбит/с,  $d=10$  мс,  $V=4$  пакета  $n=300$ .

В работе показано, что размерность Хаусдорфа такого аттрактора больше 1, но меньше 2, а именно равна 1,61. Кроме того, для случая одновременной работы 30 TCP сессий была оценена экспонента Ляпунова  $\lambda \approx 1.11$ ,

означающая, что после внесения возмущения, различие между системами нарастает со средней скоростью  $e^{\lambda} \approx 3.03$  в секунду.

Сочетание этих двух фактов (дробность размерности и положительность экспоненты Ляпунова) дает основание авторам говорить о странности аттрактора и, как следствие, о наличии в обсуждаемой системе признаков режима детерминированного хаоса.

Заметим, однако, что с точки зрения теории хаоса, траектория странного аттрактора должна быть непериодической [24]. Поэтому, так как аттрактор представленный на рис. 21 – периодический (хотя период его достаточно большой – около 4 часов), будем называть его почти странным (т.е. “странным”). Так или иначе, пусть с некоторыми допущениями, но в данной работе был сделан очень важный шаг, а именно – показано, что система одновременно работающих по одному соединению TCP сессий при некоторых параметрах может войти в режим детерминированного хаоса и производить трафик, обладающий скрытым порядком, но который выглядит как абсолютно случайный процесс и моделировался ранее именно с привлечением теории случайных процессов. Здесь важно, что это сложный, похожий на случайный, но, тем не менее, детерминированный процесс. Задавая абсолютно точно начальные условия, мы можем повторять данный процесс сколь угодно раз, при этом траектории будут абсолютно одинаковыми. Однако сколь угодно малое отклонение от первоначальных условий – и траектории разбегаются, причем расстояние между ними во времени увеличивается по экспоненте. Но опять-таки, последующее состояние системы всегда полностью определяется ее прошлым.

С точки зрения управления трафиком, присутствие режимов детерминированности (хаоса) в трафике означает теоретическую возможность его предсказания, при определении точной зависимости, конечно. Однако следует заметить, что данный подход к прогнозированию имеет следующий недостаток: поскольку физически невозможно установить абсолютно точные начальные условия для предсказательной функции, соответствующие данному

трафику, то с увеличением интервала предсказания (времени, на которое предсказывается процесс) различие между реальным трафиком и предсказанным будет стремительно увеличиваться. Причем, как следует из теории нелинейной динамики [32], это увеличение будет происходить по экспоненциальному закону.

## 12. Заключение

В настоящей работе, на взгляд автора, изложены основные аспекты теории самоподобных процессов и указана их взаимосвязь с процессами, имеющими место в информационных сетях. Автором сделана попытка рассмотреть и, по возможности, взаимоувязать в отношении телетрафика такие понятия, как фрактальность, самоподобие, хаос и продолжительная память, до сих пор во многих работах изучаемых отдельно друг от друга. Данный шаг позволяет с широких позиций и более осмысленно подойти к проблеме прогнозирования самоподобных процессов, проявляющихся не только в сетевом трафике, но и в таких областях, как финансовая аналитика, геофизика, гидрология, биология и пр. Показано, что предсказание будущего процессов с длинной памятью, к которым относятся самоподобные процессы, теоретически можно осуществить, зная их относительно недавнее прошлое. Применение концепций теории нелинейной динамики видится полезным только при построении краткосрочных прогнозов, поскольку невозможность задания начальных условий с бесконечной точностью в сочетании с экспоненциальной расходимостью соседних траекторий хаотической системы делает предсказание на длительное время вперед практически невозможным.

Прогнозирование телетрафика, в свою очередь, играет значительную роль при разработке алгоритмов работы сети, повышающих качество обслуживания (QoS). Провайдеры телекоммуникационных услуг, например, заинтересованы в возможностях долгосрочного прогнозирования загрузки собственной сети для планирования ее своевременного развития. Поэтому данное направление

представляется достаточно перспективным и, по всей видимости, будет являться предметом дальнейших исследований.

## Благодарности

Мы многое из книжек узнаем,  
а истины передаются устно...

В. Высоцкий

Автор благодарит Daemon Wischik, Евгения Кучерявого, Ian Kaplan, Piotr Kokoszka, Akihiko Inoue, Ray. J. Bhansali, а также Александра С. Дмитриева, Николая Б. Лиханова, Евгения А. Богатырева и Вячеслава И. Найденова за ценные дискуссии и понимание.

## Литература

1. W.E.Leland, M.S.Taqqu, W.Willinger, and D.V.Wilson. On the self-similar nature of ethernet traffic (extended version).IEEE/ACM Transactions of Networking, 2(1):1-15,1994.
2. D.Wischik. Implication of long-range dependance. 26.02.2001.
3. Цыбаков Б.С. Модель телетрафика на основе самоподобного случайного процесса.// Радиотехника-№5, с. 24-31, 1999г.
4. Tsybakov B., Georganas N. Self-similar processes in communications networks // IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 44, pp. 1713--1725, Sep. 1998.
5. T. Gneiting, M. Schlather. Stochastic models which separate fractal dimension and Hurst effect.//NRCSE-TRS, № 069, Sep. 20, 2001.
6. Кендел М. Временные ряды / Пер. с англ. и предисл. Ю.П. Лукашина. - М.: Финансы и статистика, 1981. – 199с.
7. Feng W., Tinnakornsriruphap P. The Failure of TCP in High-Performance Computational Grids //SC2000: High-Performance Network and Computing Conference, Dallas, TX , November 2000.

8. Заборовский В.С. Методы и средства исследования процессов в высокоскоростных компьютерных сетях.// Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук – СПб.,1999 г.
9. Городецкий А.Я., Заборовский В.С., Информатика. Фрактальные процессы в компьютерных сетях.// Учебное пособие. –СПб.: Изд.-во СПбГТУ, 2000 г.
10. J.Feder. Statistical Physics. Lecture. 2002.
11. Grabbe O. Chaos and Fractals in Financial Markets// [www.aci.net/kalliste/](http://www.aci.net/kalliste/)
12. Найденов В.И., Кожевникова И.А. Эффект Харста в геофизике.// Природа №1 2000 г.
13. Шелухин О.И., Тенякишев А.М., Осин А.В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. Монография./ Под ред. О.И. Шелухина. – М.: Радиотехника, 2003.-480с.
14. Криштофович А.Ю. Самоподобие трафика сети ОКС №7. – МКИССиТ, Санкт- Петербург, 2002 г.
15. Бершадский А.В. Статистическая модель рыночных событий. Исследовано в России. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/132.pdf>.
16. Veres A., Voda M. The Chaotic Nature of TCP Congestion Control // Proceedings of IEEE INFOCOM'2000, March 2000.
17. Kugiumtzis D. Boudourides M. Chaotic Analysis of Internet Ping Data: Just a Random Generator? // SOEIS meeting at Bielefeld, March 27-28, 1998
18. Петров В.В., Богатырев Е.А. Самоподобие трафика в компьютерных сетях. 58-я Научная сессия, посвященная Дню радио, Москва 2003.
19. Kaplan I. Estimating the Hurst exponent. [http://www.bearcave.com/misl/misl\\_tech/wavelets/hurst/](http://www.bearcave.com/misl/misl_tech/wavelets/hurst/)
20. Park K., Willinger W. Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation, John Wiley & Sons, 2000.
21. NS software and documentation is available at the following site: <http://www-mash.CS.Berkeley.EDU/ns>.
22. Internet traffic archive <http://ita.ee.lbl.gov/>
23. Vegesna S. Качество обслуживания в IP сетях, Вильямс, 2003

24. Policing and Shaping Overview, QC: Cisco IOS Release 12.0 Quality of Service Solutions Configuration Guide <http://www.cisco.com>
25. Östring S., Sirisena H., The Influence the Long-Range Dependence on Traffic Prediction, Proceedings of ICC'01, Helsinki, June 2001.
26. Miloucheva I., Müller E., Anzaloni A., A practical approach to forecast Quality of Service parameters considering outliers. 2003.
27. Beran J. Statistical Methods for Data with Long-Range Dependence. //Statistical Science, Volume 7, Issue 4 (Nov., 1992), 404-416.
28. Beran J. Prediction of 0-1-events for short- and long- memory time series.
29. Foag J, Wild T., Traffic Prediction Algorithm for Speculative Network Processors
30. Trajkovic L., Neidhardt A., Internet traffic prediction// Centre for Systems Science, Simon Fraser University, Vol. 12, Issue 1, Mar. 2000.
31. Koucheryavy Y., Harju J., A novel approach for self-similar traffic prediction// Proceedings of the St. Petersburg Regional International Teletraffic Seminar, St. Petersburg, Russia, January 29 - February 1, 2002, pp. 172 - 179.
32. Анищенко В.С. Знакомство с нелинейной динамикой. Лекции соросовского профессора. Саратов 2000.
33. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Москва-Ижевск 2001.
34. Уайндер С. Справочник по технологиям и средствам связи. Москва "Мир" 2000.
35. Gripenberg G., Norros I. On the prediction of fractal Brownian motion. Journal of Applied Probability, vol.33, 400-410, 1996.