

Самоподобие и долговременная зависимость в телетрафике

Микеле Пагано

`m.pagano@iet.unipi.it`

*Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Пизанский университет, Пиза, Италия*

*Пятнадцатая Международная Азиатская школа-семинар
Проблемы оптимизации сложных систем*

26-30 августа 2019 года
Академгородок, Новосибирск

- 1 Введение
- 2 Долговременная зависимость
- 3 Самоподобие
- 4 Распределения с тяжёлыми хвостами
- 5 Заключение

- 1 Введение
- 2 Долговременная зависимость
- 3 Самоподобие
- 4 Распределения с тяжёлыми хвостами
- 5 Заключение

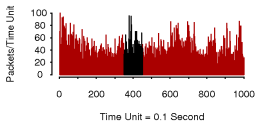
Классическая теория телетрафика

- Системы массового обслуживания и сети массового обслуживания как модели маршрутизаторов и компьютерных сетей
- основополагающая работа Эрланга – “Теория вероятностей и телефония” (1909)
- В качестве модели входящего потока используется пуассоновский (в общем случае, марковский) процесс, с показательным распределением времени обслуживания требований
- Относительная простота анализа
- Марковские входящие потоки (МС - потоки) позволяют моделировать экспоненциально убывающую корреляцию

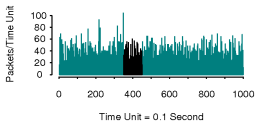
Особенности потоков трафика в современных сетях

- Наличие тяжелых хвостов у распределений вероятностей длин периодов активности и покоя
- Самоподобие
- Свойство долгой памяти (или медленно убывающей зависимости)
- Пачечность (Burstiness)

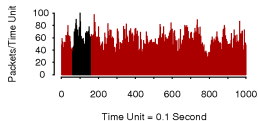
Самоподобие трафика



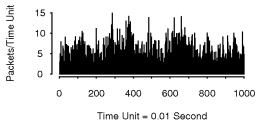
Time Unit = 0.1 Second



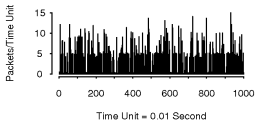
Time Unit = 0.1 Second



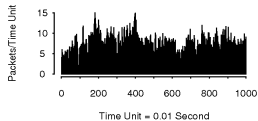
Time Unit = 0.1 Second



Time Unit = 0.01 Second



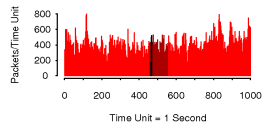
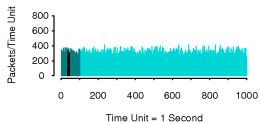
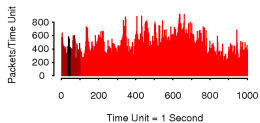
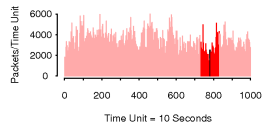
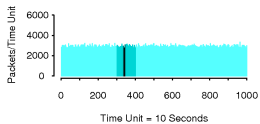
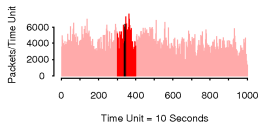
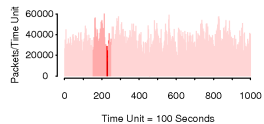
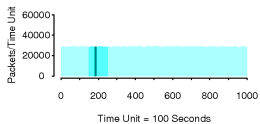
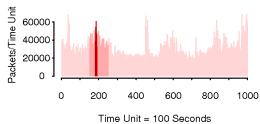
Time Unit = 0.01 Second



Time Unit = 0.01 Second

M. S. Taqqu, W. Willinger, R. Sherman *Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling*, Computer communication review, 1997

Самоподобие трафика



- 1 Введение
- 2 Долговременная зависимость
 - Определение
 - Влияние LRD на CMO
- 3 Самоподобие
- 4 Распределения с тяжёлыми хвостами
- 5 Заключение

Общие обозначения

- Пусть $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ – процесс стационарный в широком смысле

Ковариационная функция

$$r(k) = \text{Cov}(X_n, X_{n-k}) \triangleq \mathbb{E}[(X_n - \mu)(X_{n-k} - \mu)]$$

где $\mu = \mathbb{E}X_n$

Автокорреляционная функция

$$\rho(k) \triangleq \frac{r(k)}{r(0)}$$

Спектральная плотность

Дискретное во времени преобразование Фурье функции $r(k)$, т.е.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) e^{ik\omega}$$

Долговременная зависимость

$(X_n)_n$ имеет **долговременную зависимость (LRD)** тогда и только тогда, когда (следующие свойства эквивалентны):

- $\rho(k)$ уменьшается как несуммируемая степенная зависимость, когда k стремится к бесконечности

$$\rho(k) \sim k^{-\alpha} \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

где $0 < \alpha < 1$

- $S(\omega)$ расходуется как интегрируемая степенная зависимость около нуля

$$S(\omega) \sim \omega^{-\beta} \quad \text{при } \omega \rightarrow 0,$$

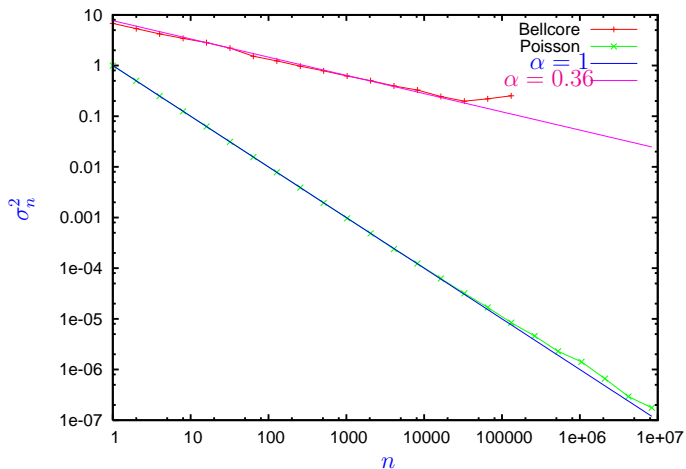
где $0 < \beta < 1$ и $\beta = 1 - \alpha$

- Дисперсия агрегированного процесса затухает медленнее, чем размер выборки (График изменения дисперсии)

$$\mathbb{D} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i \right) \sim n^{-\alpha} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

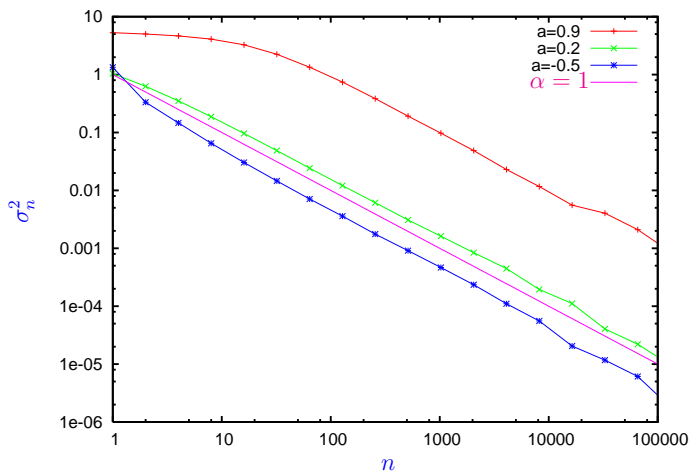
График изменения дисперсии

- Реальные данные трафика, измеренные в Белкоре в августе 1989



Эффект кратковременной зависимости *только* для маленьких окон

- Авторегрессия первого порядка: $\rho(k) = a^{|k|}$

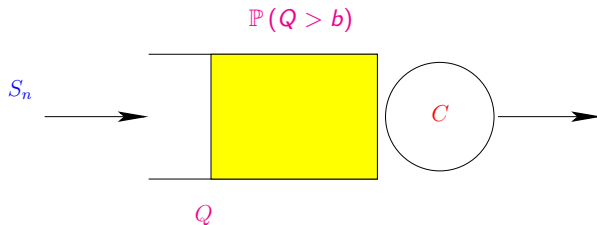


Вероятность переполнения

Характеристики СМО

- Система в дискретном времени
- Накопительный входной поток: $S_n = \sum_{k=0}^n A_k$
- Предельная нормированная производящая функция кумулянтов для накопительного входного процесса S_n : $\Lambda(\theta)$
- Один сервер с постоянной скоростью обслуживания C
- Бесконечный буфер
- Стационарное значение нагрузки: Q

Вероятность переполнения – Вероятность того, что величина стационарной нагрузки Q превысит некоторое пороговое значение b



Сравнение SRD и LRD трафиков

SRD трафик

$$\mathbb{P}(Q > b) \approx e^{-\delta b}$$

$$\delta = \inf_{\tau > 0} \tau \Lambda^* \left(C + \frac{1}{\tau} \right)$$

$$\Lambda(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E} e^{\theta S_n}$$

$$\Lambda^*(x) \triangleq \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (x\theta - \Lambda(\theta))$$

Преобразование
Фенхеля-Лежандра

LRD трафик

$$\mathbb{P}(Q > b) \approx e^{-\delta b^{2-2H}}$$

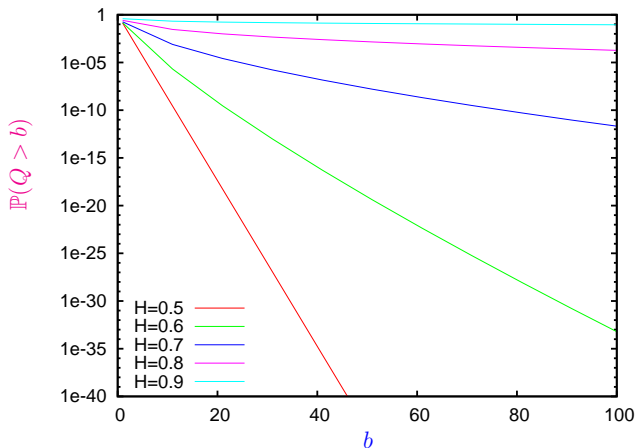
$$\delta = \inf_{\tau > 0} \tau^{2-2H} \Lambda^* \left(C + \frac{1}{\tau} \right)$$

$$\Lambda(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a(n)} \log \mathbb{E} e^{\frac{\theta(n)}{n} \theta S_n}$$

где $a(n) = n^2 / \text{Var}[S_n]$

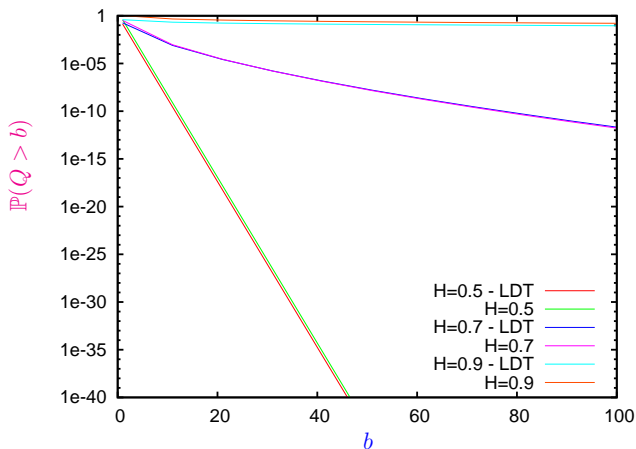
$$\alpha = 2 - 2H$$

Пример: Фрактальный Броуновский трафик



$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{P}(Q > b)}{\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{b}{1-H} \right)^{2-2H} \left(\frac{r}{H} \right)^{2H} \right)} = 1 \quad \text{где } r = C - \mathbb{E}A_n$$

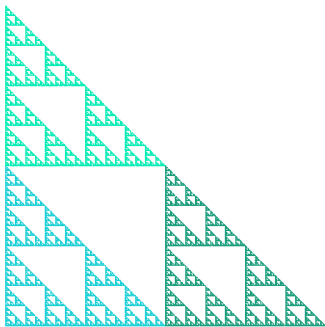
Более аккуратные оценки



$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(Q > b)}{b^{2H-3+1/H} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{b}{1-H}\right)^{2-2H} \left(\frac{r}{H}\right)^{2H}\right)} = \frac{\alpha(H, r)}{\sqrt{2\pi}\beta(H, r)}$$

- 1 Введение
- 2 Долговременная зависимость
- 3 Самоподобие
 - Детерминистическое самоподобие
 - Статистическое самоподобие в непрерывном времени
 - Статистическое самоподобие в дискретном времени
 - Самоподобные процессы
- 4 Распределения с тяжёлыми хвостами
- 5 Заключение

Детерминистическое самоподобие



- Система итерируемых функций (Iterated Function System, IFS): эти сложные изображения могут быть описаны **ограниченным числом аффинных преобразований**
- Теория IFS представляет собой основу для фрактального сжатия изображения

Система итерируемых функций: примеры

Система аффинных преобразований w_i

$$w_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}$$

Треугольник (салфетка) Серпинского

w_i	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	f_i	p_i
1	.5	0	0	.5	0	0	.33
2	.5	0	0	.5	0	.5	.33
3	.5	0	0	.5	.5	0	.34

Лист папоротника (Барнсли)

w_i	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	f_i	p_i
1	0	0	0	.16	0	0	.01
2	.85	.04	-.04	.85	0	1.6	.85
3	.2	-.26	.23	.22	0	1.6	.07
4	-.15	.28	.26	.24	0	.44	.07

Статистическое самоподобие

- **Интуитивная идея:** выборочные траектории самоподобного процесса выглядят статистически одинаково на любых временных шкалах
- **Самоподобие для процессов в непрерывном времени**
 - Пусть $(Y_t)_t$ – процесс в непрерывном времени ($t \in \mathbb{R}$) (обычно Y_t будет представлять накопленный объем работы на интервале $[0, t]$).
 - $(Y_t)_t$ – **самоподобен** с параметром Херста H тогда и только тогда, когда

$$c^{-H} Y_{ct} \stackrel{(d)}{=} Y_t \quad \forall c > 0$$

т.е., если для любых $k \geq 1$, для любых $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ и всех $c > 0$

$$(Y_{ct_1}, Y_{ct_2}, \dots, Y_{ct_k}) \quad \text{и} \quad (c^H Y_{t_1}, c^H Y_{t_2}, \dots, c^H Y_{t_k})$$

имеют одинаковое совместное распределение

- Из равенства $Y_c \stackrel{(d)}{=} c^H Y_1$ при $c \rightarrow 0$ следует, что $Y_0 = 0$ п.н., если рассматриваемый процесс является непрерывным по вероятности и невырожденным
- Если $c^{-H} Y_{ct} \stackrel{(d)}{=} Y_t$ с $H \neq 0$, тогда $(Y_t)_t$ – **не стационарный**
 - Действительно, стационарность требует, чтобы $Y_{ct} \stackrel{(d)}{=} Y_t$
 - Для моделирования временных рядов, которые выглядят стационарными, можно использовать **стационарные приращения самоподобного процесса** $X_t = Y_t - Y_{t-1}$

Стационарные приращения самоподобного процесса

Ковариация самоподобного процесса со стационарными приращениями

$$r_Y(t, s) = \frac{\sigma^2}{2} \left[|t|^{2H} - |t-s|^{2H} + |s|^{2H} \right] \quad \text{где} \quad \sigma^2 \triangleq \mathbb{E} \left[(Y_t - Y_{t-1})^2 \right]$$

- Обозначим через $X_t = Y_t - Y_{t-1}$ приращение самоподобного процесса $(Y_t)_t$
- X_t – стационарный процесс в широком смысле (с дискретным временем) с функцией ковариации

$$r_X(k) = \frac{1}{2} \sigma^2 \left[|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H} \right]$$

- Если мы обозначим через

$$X_k^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} X_i$$

агрегированный процесс, усреднённым по блокам длины m , тогда

$$X \stackrel{(d)}{=} m^{1-H} X^{(m)} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Асимптотические свойства процесса приращений

Автокорреляционная функция процесса приращений

$$\rho(k) = \frac{1}{2} \left[|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H} \right]$$

- Используя разложение в ряд Тейлора–МакЛорена

$$(1+x)^\gamma = 1 + \gamma x + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)x^2 + o(x^2)$$

для $H \neq 1/2$ легко показать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{k^{2H-2}} = H(2H-1)$$

т. к.

$$\rho(k) \sim k^{-\alpha} \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

где $\alpha = 2 - 2H$

- для $1/2 < H < 1$, процесс приращения имеет LRD
- для $H = 1$, $\rho(k) = 1 \quad \forall k$
- для $H > 1$, $\rho(k)$ расходится
- для $0 < H < 1/2$, процесс имеет SRD (фактически, $\sum \rho_k = 0$)
- для $H = 1/2$, легко показать простыми вычислениями, что $\rho(k) = \delta_0$, так как приращения являются некоррелированными

Самоподобие для процессов в дискретном времени

- Пусть $(X_n)_n$ является **стационарным процессом** в дискретном времени ($n \in \mathbb{N}$)
- $(X_n)_n$ является **строго самоподобным**, если

$$X \stackrel{(d)}{=} m^{1-H} X^{(m)} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

- $(X_n)_n$ является **асимптотически самоподобным**, если

$$X \stackrel{(d)}{=} m^{1-H} X^{(m)} \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

- Стационарный временной ряд X_n не может быть строго самоподобным или асимптотически самоподобным, если математическое ожидание не равно нулю
 - Действительно, если X является самоподобным с математическим ожиданием $\mathbb{E}X$, то определение самоподобия подразумевает, что

$$\mathbb{E}X = m^{1-H} \mathbb{E}X^{(m)} = m^{1-H} \mathbb{E}X$$

- Если X является асимптотически самоподобным, то $\mathbb{E}X \sim m^{1-H} \mathbb{E}X$
- Таким образом, в любом случае $\mathbb{E}X = 0$

Самоподобие в широком смысле

- Пусть процесс $(X_n)_n$ является **стационарным в широком смысле с дискретным временем** ($n \in \mathbb{N}$)
- $(X_n)_n$ имеет **самоподобие в широком смысле** с параметром $H = 1 - \alpha/2$, $0 < \alpha < 1$ тогда и только тогда, когда (следующие свойства эквивалентны):

- Автокорреляционная функция задается следующим образом:

$$\rho(k) = \frac{1}{2} \left[|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H} \right]$$

- Дисперсия агрегированного процесса задается следующим образом:

$$\text{Var } X^{(m)} = \sigma^2 m^{-\alpha} \quad m \in \mathbb{N}$$

- Свойства **самоподобного процесса в широком смысле**
 - X является LRD, поскольку

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{k^{-\alpha}} = H(2H - 1)$$

- Автокорреляционная функция агрегированного процесса $X^{(m)}$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\rho^{(m)}(k) = \rho(k) \quad m \in \mathbb{N} \text{ и } k \geq 0$$

Асимптотическое самоподобие в широком смысле

- Пусть процесс $(X_n)_n$ является **стационарным в широком смысле**
- $(X_n)_n$ имеет **асимптотическое самоподобие в широком смысле** с параметром $H = 1 - \alpha/2$, $0 < \alpha < 1$ тогда и только тогда, когда для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho^{(m)}(k) = \frac{1}{2} [(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}]$$

- Если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{k^{-\alpha}} = c \quad 0 < \alpha < 1,$$

где $0 < c < \infty$, тогда

- X имеет **асимптотическое самоподобие в широком смысле**
- $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } X^{(m)}}{m^{-\alpha}} = k$
- Если **процесс имеет самоподобие в широком смысле**, тогда $\rho(k) \simeq H(2H - 1) k^{-\alpha}$, а если процесс имеет **асимптотическое самоподобие в широком смысле**, тогда **только** $\rho(k) \simeq c k^{-\alpha}$, где c не обязательно равна $H(2H - 1)$
- Для **Гауссовских процессов** самоподобие и самоподобие в широком смысле эквивалентны

Слияние самоподобных процессов

- Следующие результаты полезны в приложениях, где многие потоки трафика объединяются в один
- Если X_1 и X_2 – некоррелированные процессы, так что (при $k \rightarrow \infty$) $\rho_1(k) \simeq c_1 k^{-\alpha_1}$ и $\rho_2(k) \simeq c_2 k^{-\alpha_2}$, где $0 < c_i < \infty$ и $0 < \alpha_i < 1$ ($i = 1, 2$), тогда $X_1 + X_2$ – **асимптотически самоподобный** процесс в широком смысле с параметром $H = 1 - \alpha/2$, где

$$\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$$

- Пусть некоррелированные процессы X_1 и X_2 – **строго самоподобные в широком смысле** с параметрами H_1 и H_2 .
Если $H_1 = H_2 = H$, то $X_1 + X_2$ – **строго самоподобный процесс в широком смысле** с параметром H .
Если $H_1 \neq H_2$, то $X_1 + X_2$ – **не является строго самоподобным процессом в широком смысле**, но является **асимптотически самоподобным процессом в широком смысле** с параметром

$$H = \max(H_1, H_2)$$

Процессы с долговременной зависимостью

- Фрактальное Броуновское движение
 - Фрактальный Гауссовский шум
 - Фрактальный Броуновский трафик
- Фрактальный авторегрессионный интегральный процесс скользящего среднего (fARIMA или ARFIMA)
- Poisson–Zeta процесс
- Модели в вейвлет-области
- Объединение простых кратковременно зависимых моделей
 - бесконечная суперпозиция процессов AR(1)
 - M/G/ ∞
 - суперпозиция On–Off источников
 - детерминированные хаотические карты
- α -устойчивые процессы
- Мультифрактальные процессы
- Псевдосамоподобные модели (моделирование с помощью марковских моделей)
 - Псевдосамоподобные распределения фазового типа

Фрактальное (Дробное) Броуновское движение (fBm)

- **Фрактальное Броуновское движение** $\{B_H(t), t \in \mathbb{R}\}$ – стохастический процесс, зависящий от двух параметров
 - H , параметр Херста ($0 < H < 1$)
 - $\sigma > 0$

- **Свойства fBm**

- $B_H(t)$ – **самоподобный процесс** с параметром Херста H

$$c^{-H} B_H(ct) \stackrel{(d)}{=} B_H(t)$$

и функцией ковариации

$$r_H(t, s) = \mathbb{E}[B_H(t) B_H(s)] = \frac{\sigma^2}{2} [|t|^{2H} - |t-s|^{2H} + |s|^{2H}]$$

- $B_H(t)$ имеет **стационарные приращения**
- $B_H(0) = 0$ п.н. и $\mathbb{E}B_H(t) = 0$ для всех t
- $\mathbb{E}[B_H(t)^2] = \sigma^2 |t|^{2H}$
- $B_H(t)$ имеет непрерывные траектории
- процесс $B_H(t)$ является **Гауссовским**, т.е. его конечномерные распределения являются многомерными Гауссовскими
- При $H = 1/2$, $B_H(t)$ – это обычное **Броуновское движение**

Фрактальный (Дробный) Гауссовский шум (fGn)

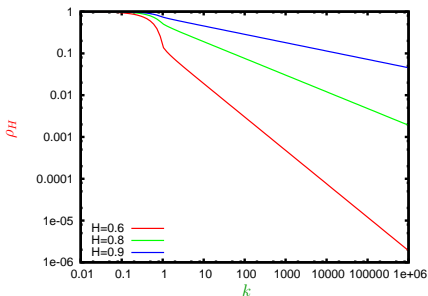
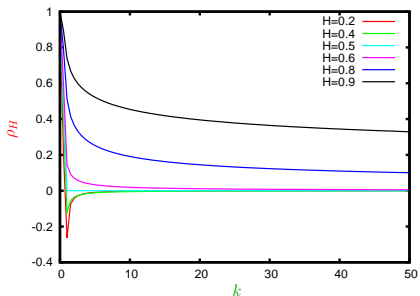
- Фрактальный гауссовский шум X_H – стационарный процесс приращений **фрактального Броуновского движения**

$$X_H(t) = B_H(t) - B_H(t - 1)$$

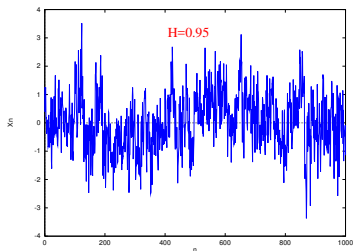
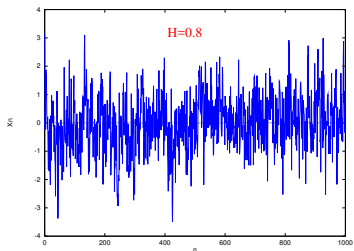
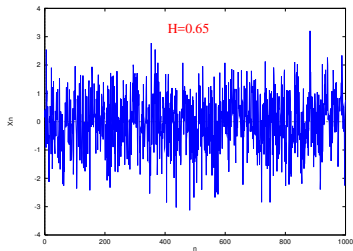
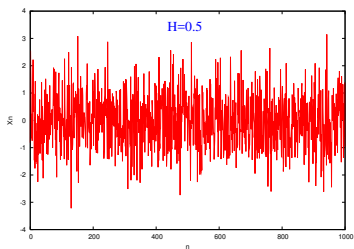
- $X_H(t)$ - строго самоподобен с параметром Херста H и ковариацией

$$r_H(k) = \text{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \frac{\sigma^2}{2} \left[(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H} \right]$$

и следовательно, для $1/2 < H < 1$ имеет LRD (с $\alpha = 2 - 2H$)

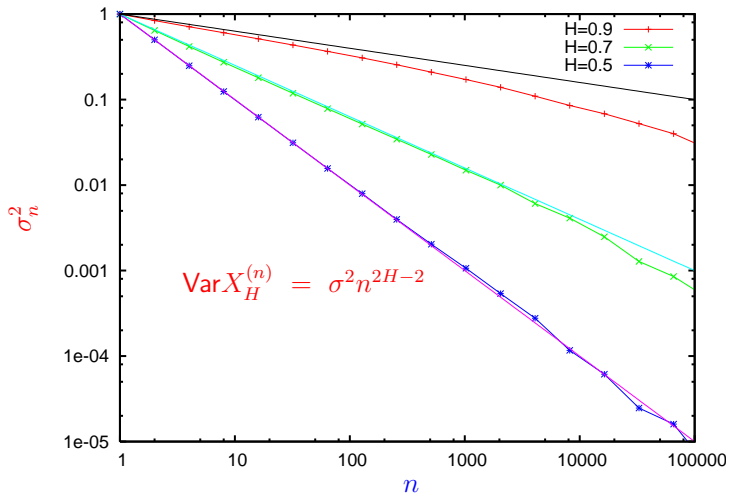


fGn – Выборочные траектории



fGn – График изменения дисперсии

- Фрактальный гауссовский шум — строго самоподобный



Фрактальный Броуновский трафик

- Фрактальное Броуновское движение может быть использовано как модель для накопительного потока

$$N(t) = mt + \sqrt{am}Z_H(t)$$

- $Z_H(t)$ - нормированное фрактальное броуновское движение (т.е. $\sigma^2 = 1$), с параметром самоподобия $H \in [1/2, 1)$
- $m > 0$ - средняя интенсивность входящего потока
- $a > 0$ - коэффициент дисперсии
- Индекс дисперсии для отсчётов (IDC)

$$I_c(\tau) = \frac{\text{Var}[N(\tau)]}{\mathbb{E}[N(\tau)]}$$

- Пуассоновский процесс с интенсивностью λ

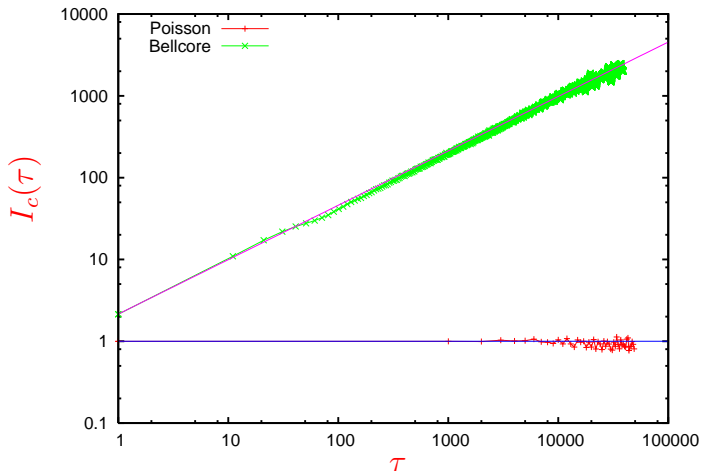
$$\text{Var}[N(\tau)] = \mathbb{E}[N(\tau)] = \lambda\tau \Rightarrow I_c(\tau) = 1$$

- Фрактальный Броуновский трафик

$$\mathbb{E}N(\tau) = m\tau \quad \text{Var}N(\tau) = am \text{Var}Z_H(\tau) = am\tau^{2H} \Rightarrow I_c(\tau) = a\tau^{2H-1}$$

Индекс дисперсии для отсчётов (IDC): примеры

- Сравнение Пуассоновского трафика с реальными данными, измеренными в Белкоре в августе 1989



Содержание

- 1 Введение
- 2 Долговременная зависимость
- 3 Самоподобие
- 4 Распределения с тяжёлыми хвостами
 - Определение и пример
 - Связь между самоподобием и тяжелыми хвостами
- 5 Заключение

Распределения с тяжёлыми хвостами

- Функция распределения F имеет **тяжёлые хвосты** ($F \in \mathcal{H}$ or $X \in \mathcal{H}$) если для всех $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E}(e^{\varepsilon X}) = \infty$$

или эквивалентно

$$e^{\varepsilon x} \bar{F}(x) \rightarrow \infty \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad \text{где } \bar{F}(t) = 1 - F(t)$$

т.е. если хвост распределения убывает медленнее экспоненты

- **Распределение Парето** (хвосты распределены по степенному закону)

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{x}\right)^\alpha \quad \alpha, \kappa > 0 \quad \text{и} \quad x \geq \kappa$$

где κ и α определяют местоположение и форму распределения, соответственно

- плотность распределения

$$f(x) = \frac{\alpha \kappa^\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

- Математическое ожидание и дисперсия

$$\mathbb{E}X = \frac{\alpha \kappa}{\alpha - 1} \quad \alpha > 1 \quad \text{Var } X = \frac{\alpha \kappa^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)} \quad \alpha > 2$$

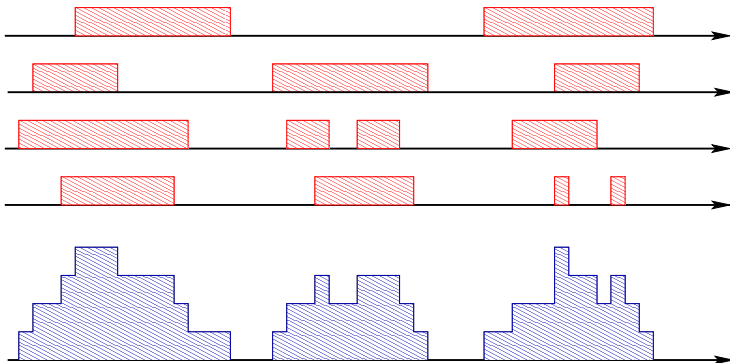
- **Бесконечная дисперсия**, если $\alpha \leq 2$

Объяснение LRD с помощью тяжелых хвостов

- В настоящее время статистические исследования данных трафика на уровне пакета подтверждают наличие самоподобия и долговременной зависимости
- Множество исследований объясняют эти результаты, рассматривая характеристики трафика на более высоком уровне объединения, обычно на прикладном уровне. На этом уровне основные объекты
 - размеры файла
 - длительность соединения
 - время передачи
- Некоторые исследования показывают, что LRD может быть вызван тяжёлыми хвостами определенных характеристик трафика
 - размер и время передачи файлов
 - время бездействия
 - максимальная скорость
 - длительность соединений
- Ключевой математический результат определяет, что наложение многих On–Off источников, чьи On или Off периоды показывают Эффект Ноя (т.е., бесконечную дисперсию), порождает совокупный сетевой трафик, который показывает Эффект Иосифа (т.е., самоподобие и долговременная зависимость)
 - Термины Эффект Иосифа и Эффект Ноя были выдуманы Мандельбротом

Наложение On-Off источников

- Сетевой трафик возникает как **объединение** большого числа потоков от отдельных пользователей
- Поведение отдельного пользователя, который чередует периоды активной работы в сети (on-период) с периодами молчания (off-период) описывается **бинарным on-off процессом**



Модель отдельного источника

- **Модель отдельного источника**: бинарный On-Off альтернирующий процесс восстановления

Жидкостная on-off модель

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t \in \text{off-период} \\ 1 & t \in \text{on-период} \end{cases}$$

- Обозначим через $\mu_{\text{он}}$ и $\mu_{\text{офф}}$ математические ожидания **он-** и **офф-периода**, соответственно
- Предположим, что

$$\bar{F}_{\text{он}} \simeq l_{\text{он}} x^{-\alpha_{\text{он}}} L_{\text{он}}(x) \quad (1 < \alpha_{\text{он}} < 2)$$

или $\sigma_{\text{он}}^2 < \infty \Rightarrow \alpha_{\text{он}} \stackrel{\Delta}{=} 2$

и

$$\bar{F}_{\text{офф}} \simeq l_{\text{офф}} x^{-\alpha_{\text{офф}}} L_{\text{офф}}(x) \quad (1 < \alpha_{\text{офф}} < 2)$$

или $\sigma_{\text{офф}}^2 < \infty \Rightarrow \alpha_{\text{офф}} \stackrel{\Delta}{=} 2$

где $l_{\text{он}}$ и $l_{\text{офф}}$ – константы, а $L_{\text{он}}(x)$ и $L_{\text{офф}}(x)$ – медленно меняющиеся на бесконечности функции

Совокупный агрегированный трафик

- Предположим, что имеется N н. о. р. источников
- Источник k ($k = 1, \dots, N$) характеризуется процессом $(I^{(k)}(t))_{t \geq 0}$
- Пусть $T > 0$ – некоторый параметр шкалы времени
- **Совокупный агрегированный трафик** на интервале $[0, tT]$, порожденный этими источниками — это суммарное время активности всех N источников на интервале $[0, tT]$

Совокупный агрегированный трафик на интервале $[0, tT]$

$$A_N(tT) = \int_0^{tT} \left(\sum_{k=1}^N I_k(u) \right) du,$$

- Поведение процесса $A_N(tT)$ при больших значениях N и T
- **Сходимость к фрактальному Броуновскому движению:** с ростом сначала N , а затем T (этот порядок важен) распределение $A_N(tT)$ сближается с распределением процесса

$$TN \frac{\mu_{\text{on}}}{\mu_{\text{on}} + \mu_{\text{off}}} t + T^H \sqrt{L(T)N} \sigma_{\text{lim}} Z_H(t)$$

где $Z_H(t)$ – нормированное фрактальное броуновское движение

Предельная теорема для агрегированного трафика

Более точная аппроксимация является следствием следующей функциональной предельной теоремы

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T^H \sqrt{L(T)} \sqrt{N}} \left(A_N(tT) - TN \frac{\mu_{on}}{\mu_{on} + \mu_{off}} t \right) \stackrel{(d)}{=} \sigma_{lim} Z_H(t)$$

- σ_{lim} – положительная константа, зависящая от исходных параметров
- $L(T)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция, также выраженная через исходные параметры
- $Z_H(t)$ – нормированное фрактальное броуновское движение, с

$$H = \frac{3 - \alpha_{min}}{2} \quad \text{где} \quad \alpha_{min} = \min(\alpha_{on}, \alpha_{off})$$

- Средний уровень $TN \frac{\mu_{on}}{\mu_{on} + \mu_{off}} t$ обеспечивает основной вклад
- Колебания от этого уровня заданы фрактальным Броуновским движением $\sigma_{lim} Z_H(t)$, нормированным коэффициентом $T^H \sqrt{L(T)} \sqrt{N}$
- $1 < \alpha_{min} < 2$ подразумевает $1/2 < H < 1$, т.е., главный компонент, необходимый для получения LRD – это свойство тяжелых хвостов для On или Off периода

- 1 Введение
- 2 Долговременная зависимость
- 3 Самоподобие
- 4 Распределения с тяжёлыми хвостами
- 5 **Заключение**

Самоподобие и долговременная зависимость

Jan Beran, "Statistics for Long-Memory Processes", Chapman & Hall, New York, 2004

W. E. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger, D. V. Wilson, "On the self-similar nature of Ethernet traffic (Extended Version)", IEEE/ACM Transactions in Networking, 1994

M. S. Taqqu, W. Willinger, and R. Sherman, "Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling", Computer communication review, 1997

Walter Willinger and Vern Paxson, "Where mathematics meets the Internet", Notices of the American Mathematical Society, 1998

Тяжелые хвосты

Gennady Samorodnitsky, "Long Range Dependence, Heavy Tails and Rare Events. Lecture notes", MaPhySto, Aarhus, 2002

Gennady Samorodnitsky and Murad S Taqqu, "Stable non-Gaussian random processes: stochastic models with infinite variance", Chapman and Hall, 1994.

СМО с фрактальными потоками

Ilkka Norros, "On the use of fractional Brownian motion in the theory of connectionless networks", IEEE J.Sel. A. Commun., 2006

Ayalvadi Ganesh, Neil O'Connell, and Damon Wischik, "Big Queues", Springer, 2004

Michel Mandjes, "Large Deviations of Gaussian Queues", Wiley, 2007

