

Министерство образования Российской Федерации
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

П.А. Жилин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
2001

Министерство образования Российской Федерации
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

П.А. Жилин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Санкт–Петербург
Издательство СПбГТУ
2001

УДК 531

Ж и л и н П. А. **Теоретическая механика**: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. 146 с.

Пособие соответствует авторскому курсу дисциплины «Теоретическая механика» направления бакалаврской подготовки 553300 «Прикладная механика». Рассмотрены фундаментальные понятия механики, которые трудны для восприятия при лекционном изложении и не даны в традиционных учебниках по теоретической механике: пространство, время, принцип инерции Галилея, инерциальные системы отсчета, трансляционные и спинорные движения, тела и их динамические структуры, кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент, воздействия, т.е. силы и моменты, фундаментальные законы механики. Вводится несколько новых понятий, и рассматриваются решения ряда конкретных задач.

Предназначено для студентов, изучающих технические специальности, а также аспирантов и преподавателей, деятельность которых связана с вопросами механики.

*Выполнение данной работы поддержано грантом Т00 - 6.7 - 1021
Министерства образования РФ.*

Ил.: 6. Библиогр.: 43 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного технического университета.

© Санкт-Петербургский государственный
технический университет, 2001
© Жилин П.А., 2001

Оглавление

Предисловие.....	5
1. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла.....	7
1.1. Введение.....	7
1.2. Инерциальные системы отсчета.....	8
1.2.1. Введение тел отсчета.....	8
1.2.2. Принцип инерции Галилея. Инерциальные тела отсчета.....	10
1.2.3. Время.....	12
1.2.4. Инерциальные системы отсчета.....	14
1.3. Системы координат и их замена.....	16
1.4. Замена систем отсчета.....	21
1.5. Волновое уравнение. Идея ковариантности.....	24
1.6. Уравнения Максвелла.....	29
1.7. Рациональная механика и электродинамика.....	33
Список литературы.....	39
2. Основные положения эйлеровой механики.....	40
2.1. Введение.....	40
2.2. Пространство, время, движения.....	41
2.2.1. Тела отсчета. Время. Системы отсчета.....	41
2.2.2. Инерциальные системы отсчета.....	44
2.2.3. Системы отсчета и системы координат.....	46
2.2.4. Трансляционные и спинорные движения.....	46
2.3. Тела и их динамические структуры.....	48
2.3.1. Тела-точки и их размерность.....	48
2.3.2. Тела и их динамические структуры.....	53
2.4. Воздействия.....	56
2.4.1. Силы и моменты.....	56
2.4.2. Статика абсолютно твердого тела.....	59
2.5. Полная и внутренняя энергии.....	61
2.6. Фундаментальные законы механики.....	64
2.6.1. Уравнение баланса количества движения.....	65
2.6.2. Уравнение баланса кинетического момента.....	69
2.6.3. Первое и второе начала термодинамики.....	74

2.7.	Заключение.....	84
	Список литературы.....	84
3.	A new approach to the analysis of free rotations of rigid bodies.....	86
3.1.	Introduction.....	86
3.2.	Free rotation of rigid bodies.....	95
3.2.1.	Statement of the problem.....	95
3.2.2.	Transformation of the energy integral.....	96
3.2.3.	Rotations of a body in the case $\sigma = 0$	98
3.2.4.	Rotations of rigid bodies in the case of positive σ	100
3.2.5.	Rotation of the body in the case $\sigma < 0$	106
3.2.6.	Discussion.....	108
3.3.	Classical solution.....	109
3.4.	Final remarks.....	114
	References.....	115
4.	Rigid body oscillator: a general model and some results.....	116
4.1.	Introduction.....	116
4.2.	Mathematical preliminaries.....	118
4.2.1.	Vector of turn.....	118
4.2.2.	Integrating tensor.....	119
4.2.3.	Potential moment.....	122
4.2.4.	The perturbation method on the set of orthogonal tensors.....	123
4.3.	The equations of motion of a rigid body oscillator.....	125
4.4.	Paradox by Nikolai.....	127
4.5.	Rigorous justification of the Nikolai paradox.....	130
4.6.	The simplest rigid body oscillator.....	132
4.6.1.	Conventional approach.....	133
4.6.2.	The total integrability of the basic equations.....	133
4.6.3.	Comparison of two approaches.....	136
4.7.	The regular precession of the rigid body oscillator.....	137
4.8.	Conclusion.....	139
A.	Appendix. Notation and terminology.....	140
B.	Appendix. The representation for the integrating tensor.....	141
C.	Appendix. Elastic energy of foundation.....	142
D.	Appendix. Transversally isotropic potential.....	143
	References.....	144

Предисловие

У большинства выпускников технических вузов складывается устойчивое мнение о том, что теоретическая механика — это давно законченная и уже закрытая глава науки, что в ней нет места для развития и новых открытий. Формированию подобного мнения не препятствуют и существующие учебники по теоретической механике. Между тем, классическая механика в XX-ом веке развивалась весьма интенсивно и претерпела существенные изменения. Главное изменение связано с переходом на фундамент эйлеровой механики, являющейся естественным развитием ньютоновой механики. При этом все, что было достигнуто ранее, полностью сохраняется и не требует никаких изменений. В то же время сфера действия классической механики существенно расширяется. Особенно это заметно при описании таких явлений, как электромагнетизм, пьезоэлектричество и ферромагнетизм, т.е. областей, которые ранее считались недоступными для классической механики. Основное отличие эйлеровой механики от ньютоновой механики заключается в более полном и последовательном учете спинорных движений. Уравнения баланса количества движения и кинетического момента становятся независимыми законами. При этом понятие силы сохраняется, но момент уже не полностью определяется силами.

Пособие содержит изложение ряда фундаментальных понятий механики, которые трудны для восприятия при лекционном изложении и, кроме того, не излагаются в традиционных учебниках по теоретической механике. Прежде всего, речь идет о таких понятиях как пространство, время, принцип инерции Галилея, инерциальные системы отсчета. Как ни удивительно, но строгое введение этих понятий было осуществлено только в 1940 году. Этим понятиям посвящена первая глава пособия. Вторая глава посвящена фундаментальным законам эйлеровой механики, в которой наряду с трансляционными движениями вводятся в рассмотрение спинорные движения, часто играющие центральную роль. Здесь рассматриваются тела и их динамические структуры: кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент. Подробно обсуждаются воздействия, т.е. силы и моменты, причем моменты в эйлеровой механике являются самостоятельными

понятиями. Фундаментальные законы формулируются для открытых тел, т.е. тел, которые могут обмениваться со своим окружением массой, количеством движения, кинетическим моментом и энергией. Третья глава содержит введение в кинематику спинорных движений. Доказывается общая теорема о представлении тензора поворота. Вводимое представление содержит все известные представления тензора поворота и добавляет к ним новые. Подробно излагается случай интегрируемости Эйлера в динамике твердого тела. Эта классическая задача приводится во всех учебниках, но даваемое в них решение трудно использовать для практических целей. Излагаемое в пособии решение не только проще классического, но и поучительно, поскольку показывает важность правильного выбора осей, поворотами вокруг которых описывается вращение тела. В четвертой главе строится модель твердотельного осциллятора, т.е. твердого тела на упругом основании. Здесь вводятся несколько новых понятий. В частности, вводится понятие тензора-интегратора, играющего важную роль при введении понятия потенциального момента. Рассматриваются решения ряда конкретных задач. Подробно обсуждается знаменитый парадокс Николаи. О необходимости построения модели твердотельного осциллятора говорили многие известные физики. Эта модель важна, например, для объяснения аномального эффекта Зеемана. Кроме того, здесь вводятся несколько новых понятий, и рассматриваются решения ряда конкретных задач. В целом результаты главы полезны при исследовании динамики роторных машин и гироскопических приборов.

Как уже отмечалось, пособие содержит четыре главы, содержание которых почти не пересекается. Поэтому любую из глав можно читать независимо от других. Несколько непривычным для современных студентов является то, что две главы представлены на английском языке. Автор счел возможным не давать их перевод на русский язык по следующим соображениям. Во-первых, умение читать на иностранных языках для современных студентов является необходимостью. Во-вторых, в 20 – 30-е годы XX-го века в нашем политехническом институте студентам предлагались учебники на английском, немецком и французском языках, и это считалось нормой. Это и должно оставаться нормой до тех пор, пока мы не убедим научно-техническое сообщество остального мира в том, что именно русский язык является наилучшим средством общения.

Выполнение данной работы осуществлялось при поддержке гранта Т00 – 6.7 – 1021 Министерства образования РФ.

1. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла

1.1 Введение

Со времени создания электродинамики Максвелла прошло примерно 130 лет. Уравнения Максвелла широко применяются в механике, в частности, в электромеханике. Нельзя, однако, сказать, что состояние проблемы в целом может быть признано удовлетворительным в логическом отношении. До сих пор уравнения Максвелла не вписываются естественным образом в структуры механики. Более того, принято считать, что между электродинамикой Максвелла и классической механикой существует фундаментальное различие, ибо уравнения Максвелла инвариантны относительно группы Лоренца, а уравнения классической механики — относительно группы Галилея. Долгое время справедливость сказанного не подвергалась тщательному логическому анализу с позиций рациональной механики, хотя вопросов накопилось довольно много. Прежде всего, как вообще могло случиться, что между механикой и электродинамикой возникло фундаментальное расхождение? Какие именно аксиомы механики противоречат законам электродинамики? Ответ хотелось бы видеть столь же ясным, как в геометрии, где точка бифуркации между евклидовой и неевклидовой геометриями лежит в V постулате. В конце концов, Максвелл создал свою электродинамику в 1861 – 1864 гг., когда идеи классической механики играли господствующую роль. От каких из них отказался Максвелл? Или какие новые идеи, несовместимые с существующими, он внес? Бесспорно, Максвелл открыл действительно новую идею, осознавать которую начали только через столетие, но в чем ее противоречие с классической механикой? Возникшая в XX веке специальная теория относительности, казалась бы, ответила на все эти вопросы. Но нельзя забывать, что специальная теория относительности дает всего лишь возможную интерпретацию, которая несовместима с классической механикой. Нас же интересует несовместимость самой электродинамики с исходными

аксиомами механики, а это не одно и то же. Рассмотрим такой, например, вопрос.

Известно, что в основаниях электродинамики и многих разделов механики лежат волновые уравнения. Каким же образом одно и то же уравнение оказывается инвариантным относительно разных групп преобразований в зависимости от области приложений? Откуда может знать это уравнение, где его собираются использовать?

Имеется множество других вопросов, но вряд ли их стоит перечислять. Не лучше ли просто повнимательнее приглядеться к уравнениям Максвелла и только после этого продолжать задавать вопросы? Однако здесь возникает затруднение. Чтобы прояснить его, процитируем Л.И.Мандельштама [1]: “Неправильно полагать, что теория относительности перевернула наши понятия о времени и о пространстве в том смысле, что на место старых и четких понятий она поставила такие же новые. Это не так. Одна из больших заслуг теории относительности состоит в том, что она показала, что основные понятия, которыми оперировали раньше — во всяком случае, в известной части, — вовсе не были определены, что многие высказывания не имели вообще никакого смысла”. Аналогичной точки зрения придерживаются и многие другие крупные физики. Справедливы ли эти претензии к классической механике? К сожалению, по форме, а не по существу, они справедливы: в большинстве учебников по механике вопросы пространства и времени действительно излагаются крайне небрежно. Как будет показано ниже, расхождение во взглядах физики и рациональной механики на электродинамику и многие другие примыкающие вопросы лежит именно на этом “элементарном” уровне. Поэтому автор вынужден был начать с обсуждения исходной позиции рациональной механики. Разумеется, в изложенном нет претензий на новизну, но и конкретных ссылок автор дать не в состоянии.

1.2 Инерциальные системы отсчета

1.2.1 Введение тел отсчета

Ньютоновское определение абсолютного пространства общеизвестно. Если к нему добавить всеми принимаемые соглашения о полной равноправности всех точек и всех направлений в абсолютном пространстве, то становится ясным, что ньютоновская концепция абсолютного пространства вообще не дает возможности судить о движении, как это подробно объяснялось самим Ньютоном. Неразрешимость проблемы состоит в том, что мы лишены воз-

возможности параметризовать точки абсолютного пространства. Поэтому вводятся в рассмотрение тела отсчета [2]. Для этого возьмем точку, снабженную меткой 0 и назовем ее началом. К ней присоединим тройку некомпланарных “векторов”, т.е. трех рукотворных стрелок \mathbf{e}_k . Слово “векторы” в применении к объектам \mathbf{e}_k взяты в кавычки, ибо у нас нет возможности судить об их направлениях в абсолютном пространстве. Более того, “векторы” \mathbf{e}_k сами и порождают направления в теле отсчета. Далее берем положительно определенную симметричную матрицу g_{ik} , через которую определяется скалярное произведение “векторов” $\mathbf{e}_k : \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m = g_{km}$. Компоненты матрицы g_{ik} имеют физическую размерность квадратов длин и задают масштабы расстояний. Возьмем три одномерных непрерывных множества

$$x^k : -\infty \leq x^k \leq \infty.$$

Числа x^k безразмерны. Введем в рассмотрение вектор положения

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 \equiv x^k \mathbf{e}_k, \quad -\infty \leq x^k \leq \infty, \quad (1.1)$$

где знак “+” определен правилом параллелограмма. Вектор \mathbf{r} уже имеет при фиксированных x^k определенное направление относительно отсчетных векторов \mathbf{e}_k .

Определение 1.1: *телом отсчета называется репер $\{0, \mathbf{e}_k\}$ с присоединенным к нему множеством точек, задаваемых вектором 1.1.*

Определение 1.2: *тело отсчета называется правоориентированным, если репер $\{0, \mathbf{e}_k\}$ — правый, и левоориентированным, если этот репер левый.*

В отличие от абсолютного пространства все точки тела отсчета снабжены метками, т.е. параметризованы, и в нем определены направления относительно отсчетного репера. Невозможно обнаружить движения тела отсчета относительно абсолютного пространства, но движение других тел относительно тела отсчета обнаружить можно. Понятно, что можно ввести сколько угодно различных тел отсчета, образующих шестимерный континуум. Введение таких понятий, как вектор, тензоры высших рангов, возможно только в теле отсчета. Без тела отсчета понятие вектора лишено смысла.

Все тела отсчета движутся относительно друг друга произвольным образом. Самое важное свойство этих движений состоит в их, так сказать, беспричинности, нерожденности и неуничтожимости. Получив откуда-то свои движения, тела отсчета в дальнейшем их не меняют, так как отсутствуют внешние причины для изменения этих движений и считается, что волей и энергией тела отсчета не обладают.

Аксиома А0: *тела отсчета являются воображаемыми, абсолютно пронизаемыми, однородными и изотропными. Они находятся в вечном движении, никогда не меняют своего движения и не взаимодействуют ни между собой, ни с какими-либо другими телами.*

Зыбкость этой аксиомы в логическом отношении очевидна. Это тот уровень фундамента, глубже которого механика опуститься не в состоянии. Она может только оттолкнуться от этого интуитивного фундамента и далее следовать логическому пути. Подобная ситуация типична для всех точных наук, в том числе и для математики. Если мир развивается от причин к следствию, то развитие точных наук идет в обратном направлении: от следствия, которое только и дано нам, к причине, которую наука пытается установить. Поэтому исходные постулаты всегда находятся на переднем плане науки и недостижимы для логики.

1.2.2 Принцип инерции Галилея. Инерциальные тела отсчета

Выше было введено множество тел отсчета, и пока что они все равноправны. Дальнейшее продвижение возможно только при принятии какого-либо принципа, роль которого играет принцип инерции Галилея, являющийся фундаментом всей физики.

Аксиома А1. Принцип инерции Галилея: *всякая изолированная (одинокая во всем мире) материальная точка движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.*

Принцип инерции Галилея, конечно, нельзя считать аксиомой в общепринятом смысле этого термина. Действительно, в нем фигурируют такие понятия, как “абсолютное пространство”, “прямолинейность”, “равномерность”. Ни одно из этих понятий не определено и не может быть определено без введения того, что ниже называется инерциальной системой отсчета. Поэтому принцип инерции Галилея — это голая идея, не поддающаяся экспериментальной проверке, но на этой идее держится вся физика. Нам не дано знать, что такое абсолютное пространство, но аксиома А1 определяет основные свойства абсолютного пространства и позволяет из всего множества тел отсчета отобрать те, которые обладают постулированными в А1 свойствами. Представим себе, что мы располагаем изолированной частицей, которая при движении оставляет след наподобие следа реактивного самолета. Этот след называется траекторией частицы. Пронаблюдаем движение частицы относительно всех мыслимых тел отсчета. Относительно одних тел отсчета траектория будет просто точкой, относительно других — прямой ли-

нией, наконец, относительно третьих траектория будет криволинейной. Эти последние тела исключим из числа претендентов на роль абсолютного пространства. Запустим теперь вторую пробную частицу (первая уже улетела в бесконечность) так, чтобы хотя бы относительно одного тела отсчета, в котором траектория первой частицы была прямолинейной, траектория второй изолированной частицы была бы прямолинейной и непараллельной траектории первой частицы. Снова пронаблюдаем траектории частицы и вновь исключим из рассмотрения тела отсчета, относительно которых траектория второй частицы криволинейна. У нас остались тела отсчета двух типов: первый тип включает в себя тела отсчета, относительно которых траектории обеих частиц прямолинейны; второй тип — тела отсчета, относительно которых траектория первой частицы была точкой, а траектория второй — прямая линия или наоборот. Для тел отсчета второго типа необходимо провести третье испытание. А именно: возьмем одно из таких тел отсчета и проведем в нем плоскость, проходящую через траекторию-точку и содержащую траекторию-прямую линию. Запустим третью частицу так, чтобы ее траектория не лежала в упомянутой плоскости. Исключим из рассмотрения все тела отсчета, в которой траектория третьей частицы криволинейна. Легко понять, что дальнейшие испытания не нужны: любая изолированная частица относительно отобранных тел отсчета будет иметь прямолинейную траекторию или траекторию-точку.

Определение 1.3: *тела отсчета, относительно которых траектория любой изолированной точки (одинокой во всем мире) частицы прямолинейна или является точкой, называются **инерциальными телами отсчета**.*

В определении речь идет о траекториях, т.е. о понятиях, не оперирующих с понятием времени. Таким образом, инерциальные тела отсчета образуют трехмерный континуум тел отсчета, обладающих замечательным свойством: траектории всех точек одного инерциального тела отсчета относительно другого инерциального тела отсчета суть параллельные прямые. Множество инерциальных тел отсчета образует класс эквивалентности, отношение эквивалентности в котором устанавливается принципом инерции Галилея.

Определение 1.4: *множество инерциальных тел отсчета называется **абсолютным пространством**.*

Не следует удивляться тому, что абсолютное пространство представлено не одним каким-то телом отсчета, а классом эквивалентности. Это достаточно стандартная ситуация в математике. Например, вектор — это не какой-то единичный объект, а класс эквивалентности, состоящий из мно-

жества направленных отрезков, имеющих одинаковые длины и одинаковые направления.

1.2.3 Время

Обратимся к понятию времени, самому сложному понятию в науках о Природе. О реальном времени мы не можем сказать ничего определенного, неизвестна даже его размерность. В пользу далеко не очевидной трехмерности пространства имеется немало весьма серьезных аргументов. В пользу самоочевидной на первый взгляд одномерности времени нет не только серьезных, но вообще никаких аргументов. А самоочевидность слишком часто подводила людей. Поэтому в механике реальное время не обсуждается, а вводится в рассмотрение *математическое время* или просто *время*.

Аксиома А2. *Время является непрерывно меняющейся величиной, пробегающей одномерное неограниченное множество (числовую ось); оно направлено (ориентировано) и течет от прошлого к будущему.*

Аксиома А3 (И.Ньютон): *математическое время существует само по себе и не зависит ни от каких внешних обстоятельств. В частности, оно не зависит от движения и от выбора инерциального тела отсчета.*

Для измерения времени применяются часы, т.е. приборы, в основе действия которых лежит какой-либо периодический процесс. Необходимо, однако, иметь гарантию, что этот процесс действительно периодический. Например, мы должны быть уверены в том, что длительности всех минут по обычным часам действительно одинаковы. Единственным гарантом здесь выступает принцип инерции Галилея, утверждающий, что движение изолированной частицы относительно инерциального тела отсчета является (или, лучше сказать, *называется*) равномерным. Это и дает способ тарирования часов.

Определение 1.5. *Часы считаются оттарированными в соответствии с принципом Галилея, если за одинаковые по этим часам интервалы времени изолированная частица пролетает одинаковые расстояния в каком-либо (любом) инерциальном теле отсчета.*

Существует мнение, что аксиома А3 подразумевает существование сигналов, распространяющихся с бесконечной скоростью. Но такое мнение ни на чем не основано. Да, аксиоматикой классической механики *не отрицаются* сигналы с бесконечной скоростью, но такие сигналы *не навязываются* аксиоматикой, в том числе и аксиоматикой для воздействий. Чтобы оттарировать часы в соответствии с принципом инерции Галилея, достаточно

разместить их на изолированной частице и отмечать моменты прохождения одинаковых расстояний в инерциальном теле отсчета. На уровне идей это вполне достижимая вещь, а всякой наука строится на уровне идей. Реальность, разумеется, отличается от наших построений и, видимо, никогда не будет уложена в прокрустово ложе какой-либо науки будущего.

Чтобы сделать процесс тарировки единообразным во всех инерциальных телах отсчета, можно предложить мысленный эксперимент, в основе которого лежит допущение о равноправности всех инерциальных тел отсчета. Это допущение в немного расширенной версии будет сформулировано в виде отдельного утверждения, известного под названием принципа относительности Галилея. Представим себе, что в каждом теле отсчета неподвижно (относительно данного тела отсчета) закреплен некий прибор, способный испускать, например, фотоны или какие-либо другие частицы. Все эти приборы (или один прибор, последовательно устанавливаемый во всех телах отсчета) считаются идентичными. Далее, в момент времени $t = 0$, фиксируемый по каким-то, не обязательно оттарированным, часам, прибор испускает фотон. Измеряется расстояние $r(t)$, пролетаемое к моменту времени t , и вводится абсолютное время $t_a = r(t)/c$, где c — постоянная, имеющая размерность скорости и одинаковая во всех телах отсчета. Введенное выше определение абсолютного времени можно обратить и получится универсальная тарировка часов $t = f(ct_a)$. Ниже будет использоваться именно абсолютное время t_a , которое будет обозначаться буквой t .

Следует отчетливо понимать, что принятыми аксиомами математическое время введено достаточно жестко. Для того, чтобы прояснить это обстоятельство, рассмотрим двумерный мир, наделенный математическим временем (см. рисунок).

Плоскость xOy — это двумерное пространство. Прямая OP в плоскости xOy — прямолинейная траектория частицы. Ось Ot — ось времени. Плоскость tOP — плоскость, в которой лежит мировая линия частицы, т.е. множество точек, которое пробегала частица в трехмерном пространстве: два пространственных измерения и одно временное измерение. Кривая xOB , лежащая в плоскости tOP , есть одна из возможных мировых линий, проекция которой на пространственную плоскость есть траектория-прямая частицы в двумерном пространстве. Уравнение этой прямой имеет вид

$$x = f(t)a, \quad y = f(t)b, \quad y = bx/a. \quad (1.2)$$

Функция $f(t)$ при этом может быть достаточно произвольной. Принцип инерции Галилея требует, чтобы за одинаковые интервалы времени $t_1 - 0 =$

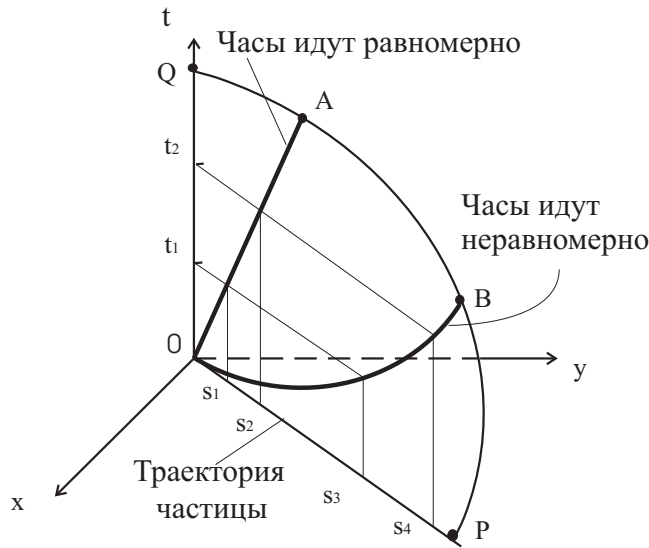


Рис. 1: Тарировка часов по Галилею

$t_2 - t_1$ пролетались бы одинаковые расстояния $s_3 - 0 = s_4 - s_3$. Если OB — кривая, то это условие не выполнено. Другая возможная мировая линия — это прямая OA . Здесь, очевидно, требование принципа инерции выполнено

$$t_1 - 0 = t_2 - t_1 \quad \Leftrightarrow \quad s_1 - 0 = s_2 - s_1.$$

Однако прямых типа OA можно провести сколько угодно и не обязательно из начала координат. Поэтому математическое время принципом инерции Галилея вводится с точностью до линейного преобразования

$$t \rightarrow kt + t_0, \quad (1.3)$$

где t_0 определяет выбор начала отсчета времени, а k — выбор единицы измерения времени (масштабный множитель).

Именно этот ограниченный произвол в выборе математического времени мы и имели в виду, говоря о жестко введенном времени.

1.2.4 Инерциальные системы отсчета

Определение 1.6: *инерциальное тело отсчета, снабженное часами, оттарированными в соответствии с принципом инерции Галилея, называется инерциальной системой отсчета.*

Инерциальных систем отсчета бесконечно много, и все они равноправны, что и фиксируется принципом относительности Галилея.

Аксиома А4. Принцип относительности Галилея: *все инерциальные системы отсчета равноправны, т.е. не существует физических экспериментов, позволяющих выделить какую-либо одну из них.*

Понятно, что сам по себе принцип относительности не участвует ни в каких построениях. Поэтому называть его аксиомой можно только условно. Принцип относительности просто фиксирует достаточность принципа инерции Галилея. Никакой существенной пользы из принципа относительности Галилея извлечь невозможно, поскольку любая теория, построенная на основе фундаментальных законов механики, будет автоматически удовлетворять этому принципу.

Определение 1.7: *абсолютное пространство, снабженное абсолютным временем, есть класс эквивалентности на множестве всех мыслимых систем отсчета, причем отношение эквивалентности устанавливается принципом инерции Галилея.*

Приведем цитату из книги К.Труделла [3]: “Система отсчета — это чистый холст, на котором можно рисовать картины природы. Этот холст может быть выбран художником прежде, чем он примется за работу. Холст накладывает некоторые ограничения на искусство художника, но ни коим образом не определяет те картины, которые художник будет рисовать”.

Замечание. Для многих книг по физике и механике характерно использование понятия “аксиома” в нетрадиционном для математики смысле. Иногда забывается, что не всякое, даже правильное, утверждение может быть принято в качестве аксиомы, ибо, став аксиомой, это утверждение может превратиться в свою противоположность. Рассмотрим в качестве иллюстрации следующую аксиому.

Аксиома АХ: *скорость света, испускаемого одним источником, одинакова во всех инерциальных системах отсчета.*

Часто думают, что этой аксиомой постулируется одинаковость скорости света во всех введенных выше инерциальных системах отсчета. Однако это не так. Главная особенность любой аксиомы состоит в том, что ей нельзя навязывать какое-либо мнение, аксиома на все смотрит со своей точки зрения. Поясним на примере. Допустим, имеется сад, в котором растут грушевые и яблоневые деревья. Примем аксиому: “На всех деревьях в саду растут груши”. Понятно, что груши не начнут в силу этой аксиомы расти на яблонях. Просто с точки зрения этой аксиомы, яблони перестанут считаться деревьями. Точно так же обстоит дело и с аксиомой АХ. Приняв эту аксиому, необходимо на ранее введенном множестве систем отсчета провести новые испытания и отобрать те из них, которые являются инерциальными с

точки зрения аксиомы АХ. Если мы, допустим, знаем утверждение АХ как экспериментально установленный факт, то необходимо построить теорию с помощью каких-то других аксиом так, чтобы утверждение АХ являлось их следствием. Если же утверждение АХ формулировать как аксиому, то будет это просто сужение класса инерциальных систем отсчета до множества инерциальных тел отсчета, имеющих одну точку, в которой расположен источник света. Ведь аксиома А1 продолжает действовать.

1.3 Системы координат и их замена

Введение инерциальных систем отсчета фундаментально опирается на принцип Галилея, и в этом смысле инерциальные системы отсчета являются не только математическими конструкциями, но и физическими понятиями. Все физические законы формулируются именно в системах отсчета, и во всех инерциальных системах отсчета их формулировки не различаются между собой. В рамках одной и той же системы отсчета можно использовать сколь угодно различных систем координат, как подвижных, так и неподвижных относительно тела отсчета. Если математическое время в разных системах отсчета может меняться только в рамках преобразования (1.3), то координатное время может выбираться как угодно, в том числе и различным в разных точках системы координат. Никакой произвол в выборе системы координат вообще не сказывается на объективном содержании физического закона, меняется только координатная форма представления физического закона.

Утверждение: *многие физические величины (скорость, ускорение, кинетическая энергия и др.) зависят от выбора системы отсчета, но ни одна физическая величина не зависит от выбора системы координат.*

Ввиду сказанного ясно, что смешение понятий систем отсчета и систем координат совершенно недопустимо. Тем не менее в литературе по физике и механике, особенно в изданиях 20–30-летней давности, не говоря уже о более старых изданиях, упомянутое смешение встречается часто. Во избежание каких бы то ни было недоразумений приведем описание понятия системы координат. При введении системы отсчета были использованы отсчетный репер $\{O, e_k\}$, отсчетная матрица g_{mn} и отсчетные координаты x^k . Только после этого и обретают смысл расстояния и направления в теле отсчета. И репер $\{O, e_k\}$, и матрица g_{mn} , и координаты x^k в данном теле отсчета зафиксированы раз и навсегда, ибо они и порождают само тело отсчета. Отсчетные координаты идентифицируют точки тела отсчета, но при желании

можно изменить способ идентификации. Важно только помнить, что все точки тела отсчета уже имеют собственные имена, которые никуда и никогда не исчезают. Ситуация здесь та же, что и у людей. Один и тот же человек может получить много удостоверений личности, но он останется одним и тем же человеком.

Определение 1.8: *системой координат в теле отсчета называется система идентификации точек данного тела отсчета.*

Для идентификации точек тела отсчета необходимо каждой такой точке сопоставить тройку чисел так, чтобы каждой точке отвечала бы одна и только одна тройка чисел, и наоборот, чтобы каждой тройке чисел отвечала бы одна и только одна точка тела отсчета. Обозначим через \mathbf{y}^i упомянутую тройку чисел

$$\mathbf{y}^i = \mathbf{y}^i(x^1, x^2, x^3, t) \equiv \mathbf{y}^i(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \mathbf{x}^i = \mathbf{x}^i(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \mathbf{y}^3, t) \equiv \mathbf{x}^i(\mathbf{y}, t). \quad (1.4)$$

Здесь мы используем подвижную систему координат \mathbf{y}^i , т.е. используем систему идентификации, зависящую от времени. В дальнейшем мы можем забыть о существовании формул (1.4) и пользоваться заменами систем координат вида

$$\mathbf{y}^{k'} = \mathbf{y}^{k'}(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \mathbf{y}^3, t) \equiv \mathbf{y}^{k'}(\mathbf{y}, t) \Rightarrow \mathbf{y}^k = \mathbf{y}^k(\mathbf{y}^{1'}, \mathbf{y}^{2'}, \mathbf{y}^{3'}, t) \equiv \mathbf{y}^k(\mathbf{y}', t). \quad (1.5)$$

Именно по отношению к заменам (1.5) определяются законы преобразования координат векторов и тензоров высшего ранга. Поскольку выбор системы координат полностью произволен, то принимается специальная аксиома, которая, впрочем, всегда подразумевалась, но никогда не выделялась отдельно. Для данной работы целесообразно выделить эту аксиому отдельно.

Аксиома А5. Принцип объективности: *все физические величины и физические законы объективны и не зависят от выбора системы координат.*

В частности, вектор положения какой-либо точки тела отсчета не зависит от выбора подвижной (или неподвижной) системы координат

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = x^k \mathbf{e}_k = \mathbf{x}^k(\mathbf{y}, t) \mathbf{e}_k \equiv \mathbf{r}(\mathbf{y}, t). \quad (1.6)$$

Точка \mathbf{r} неподвижна в теле отсчета, хотя ее координаты (не отсчетные) \mathbf{y}^k могут меняться во времени. Базисные векторы системы координат \mathbf{y}^k находятся стандартным образом:

$$\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}^k} = \frac{\partial \mathbf{x}^p(\mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}^k} \mathbf{e}_p. \quad (1.7)$$

По ним находится метрический тензор системы \mathbf{y}^k

$$\mathbf{a}_{ik} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k = \frac{\partial x^s(\mathbf{y}, t)}{\partial y^i} \frac{\partial x^p(\mathbf{y}, t)}{\partial y^k} \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_p = \frac{\partial x^s}{\partial y^i} \frac{\partial x^p}{\partial y^k} g_{sp}. \quad (1.8)$$

По матрице \mathbf{a}_{ik} находится взаимная (обратная) матрица \mathbf{a}^{mp} и векторы взаимного базиса $\mathbf{r}^p(\mathbf{y}, t)$

$$\mathbf{a}_{ik} \mathbf{a}^{kp} = \delta_i^p, \quad \mathbf{r}^p(\mathbf{y}, t) = \mathbf{a}^{pm}(\mathbf{y}, t) \mathbf{r}_m(\mathbf{y}, t). \quad (1.9)$$

Введем оператор-градиент

$$\nabla \equiv \mathbf{r}^k(\mathbf{y}, t) \frac{\partial}{\partial y^k} = \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_m = \delta_m^k, \quad \frac{\partial}{\partial y^k} = \mathbf{r}_k \cdot \nabla. \quad (1.10)$$

Этот оператор не зависит от выбора подвижной системы \mathbf{y}^k . Пусть дана частица \mathbf{A} , движущаяся относительно тела отсчета. Ее вектор положения \mathbf{r}_A является функцией времени. Скорость частицы относительно тела отсчета определяется стандартным образом:

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{r}(\mathbf{y}_A(t + \Delta t), t + \Delta t) - \mathbf{r}(\mathbf{y}_A(t), t)]. \quad (1.11)$$

Прежде чем вычислить производную (1.11), найдем скорость точки системы координат \mathbf{y}^k с фиксированными координатами \mathbf{y}_* . Эта точка (не материальная) движется относительно тела отсчета. Ее вектор положения определяется вектором $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}(\mathbf{y}_*, t)$, а скорость определяется по формуле

$$\mathbf{v}_* = \frac{d\mathbf{r}_*}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{y}_*, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{y}_*, t)}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Таким образом, частная производная по времени от вектора положения $\mathbf{r}(\mathbf{y}, t)$ определяет скорость точки системы координат с координатами \mathbf{y}_* . Никакого отношения к скорости движения материальных частиц она не имеет, и сама по себе ни в один физический закон входить не может. Теперь формулу (1.11) можно представить в виде

$$\mathbf{v}_A = \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial y_A^k} \frac{dy_A^k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial t} + \frac{dy_A^k}{dt} \mathbf{r}_k. \quad (1.13)$$

Первое слагаемое в этой формуле определяет скорость точки системы координат \mathbf{y}_A^k , а второе — скорость материальной точки \mathbf{A} относительно этой точки системы координат. Пусть дано тензорное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, заданное в каждой точке \mathbf{r} тела отсчета в функции времени. Изменение поля в данной

точке тела отсчета выражается производной от $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Очевидно, имеем формулу

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t),$$

так как точка \mathbf{r} тела отсчета неподвижна, т.е. в этом случае нет разницы между полной и частной производными по времени. Ситуация меняется, если тензорное поле рассматривается не как функция точки тела отсчета и времени, а как функция подвижных координат и времени

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}(\mathbf{y}, t), t) = \mathbf{B}(\mathbf{y}(t), t). \quad (1.14)$$

Здесь мы действуем строго в согласии с требованиями математики и меняем символ функции при переходе к новым аргументам. В физике и в механике обычно этого не делают, так как значения функций $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{y}(t))$ совпадают. В дальнейшем мы будем придерживаться обычных для механики обозначений, т.е. будем писать $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{y}(t), t)$. Однако в нижеследующей формуле будут использованы более точные формулы (1.14):

$$\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{d\mathbf{B}(\mathbf{y}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y^k} \frac{dy^k}{dt}.$$

Вспоминая последнюю из формул (1.10), записываем:

$$\frac{d\mathbf{B}(\mathbf{y}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + \frac{dy^k}{dt} \mathbf{r}_k \cdot \nabla\mathbf{B}.$$

Заметим, что точка $\mathbf{r}(\mathbf{y}(t), t)$ в соответствии с (1.6) неподвижна относительно тела отсчета. Поэтому имеем:

$$\frac{d\mathbf{r}(\mathbf{y}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y^k} \frac{dy^k}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + \frac{dy^k}{dt} \mathbf{r}_k = 0.$$

Предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} - \frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \cdot \nabla\mathbf{B} \equiv \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla\mathbf{B}, \quad (1.15)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{y}, t)$ — скорость точки с фиксированными координатами \mathbf{y}^k относительно тела отсчета. В механике сплошных сред (например, в гидромеханике) координаты \mathbf{y}^k выбираются вмороженными в среду и закрепляются за одними и теми же материальными частицами. В этом случае (и только этом!) производная, стоящая в правой части (1.15), называется локальной производной поля $\mathbf{B}(\mathbf{y}, t)$, первое слагаемое в правой части (1.15) называется

конвективной производной. Материальную производную обозначают символом

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \equiv \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t).$$

Тогда (1.15) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

Если, например, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)$ — скорость частицы жидкости, то $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ есть ее ускорение. Формула (1.15) вполне стандартная, но она слишком важна для дальнейшего, чтобы ограничиться просто ссылкой. Выше мы использовали замены системы координат (1.4), которые были неподвижны относительно тела отсчета, но время в этих преобразованиях не затрагивалось. Во многих разделах механики используются и более общие координатные системы, в которых преобразуются не только пространственные координаты, но и время. А именно, используются координаты \mathbf{y}^k, τ

$$\mathbf{y}^k = \mathbf{y}^k(x^1, x^2, x^3, t) = \mathbf{y}^k(\mathbf{x}, t), \quad \tau = \tau(\mathbf{x}, t), \quad (1.16)$$

где величина τ называется координатным временем. Относительно преобразования (1.16) выдвигается только одно обязательное условие: взаимно однозначная обратимость (1.16)

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^k(\mathbf{y}, \tau), \quad t = t(\mathbf{y}, \tau). \quad (1.17)$$

Математическое время t и координатное время τ отнюдь не равноценны. Во все физические законы входят именно производные по t , от которых можно при желании перейти к производным по координатному времени τ . Пусть дано тензорное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Можно записать

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, \tau)), \quad t(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{B}(\mathbf{y}, \tau),$$

$$\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y^k} \frac{dy^k}{dt} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B}. \quad (1.18)$$

Производная

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \tau(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = f(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{y}, \tau) \quad (1.19)$$

вычисляется по (1.16), а затем с помощью (1.17) переписывается через переменные \mathbf{y}^k и τ . Здесь, если и возникают какие-либо сложности, то они носят чисто технический характер. Это обычные математические операции замены

переменных и настаивать на их особом физическом смысле не стоит. Преобразования Лоренца полностью укладываются в схему (1.16) – (1.17), поэтому все уравнения классической механики инварианты (в некотором смысле) относительно преобразования Лоренца, а также относительно значительно более общих групп преобразований. Оператор дифференцирования по математическому времени \mathbf{d}/dt есть инвариантный оператор, т.е. оператор, не зависящий от выбора системы координат. Напротив, оператор частного дифференцирования по математическому времени $\partial/\partial t$ зависит от выбора системы координат, и потому оператор $\partial/\partial t$ сам по себе не может входить в какое-либо уравнение, претендующее на физический смысл иначе, чем в виде комбинации (1.15). Легко доказывается коммутативность операторов ∇ и d/dt

$$\nabla \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \nabla \quad \left[\Rightarrow \quad \nabla \frac{\partial}{\partial t} \neq \frac{\partial}{\partial t} \nabla \right]. \quad (1.20)$$

Неравенство в скобках есть прямое следствие зависимости оператора $\partial/\partial t$ от выбора системы координат. Максвелл при введении тока смещения использовал свойство (1.20), откуда очевидно, что он использовал оператор d/dt , но не оператор $\partial/\partial t$, как это утверждается в современных учебниках физики.

1.4 Замена систем отсчета

Замены систем координат описываются формулами (1.4), (1.6) или более общими формулами (1.16), (1.17). Эти замены не налагают никаких ограничений на форму физических законов, если они записаны в векторном или тензорном виде. Если используется координатная форма записи физических законов, то, разумеется, эта форма меняется при переходе одной системы координат к другой. Например, инвариантный дифференциальный оператор Лапласа

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla \quad (1.21)$$

имеет различный вид в декартовой и цилиндрических системах координат, хотя он порожден инвариантным оператором-градиентом ∇ , определенным формулой (1.10). Совершенно иначе обстоит дело с заменами систем отсчета. Как уже отмечалось, понятие тензора любого ранга вводится только в каждой системе отсчета отдельно. Никакие операции между тензорами, заданными в разных системах отсчета, невозможны. Поэтому замена системы отсчета включает в себя предварительную операцию переноса тензора из

одной системы в другую. Ниже будет описана операция переноса вектора. Поскольку тензоры высших рангов являются элементами тензорных произведений векторных пространств, то, определив операцию переноса вектора, мы, тем самым, определяет и операцию переноса тензора любого ранга.

Пусть даны две системы отсчета \mathcal{S} и \mathcal{S}_* , которые не обязательно инерциальны, но используют математическое время, т.е. часы, оттарированные в инерциальной системе отсчета. Пусть \mathcal{S} -система порождена отсчетным репером $\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_k\}$, отсчетной матрицей g_{ik} и отсчетными координатами x^k . Система \mathcal{S}_* порождена теми же объектами, снабженными звездочками: $\{\mathbf{0}_*, \mathbf{e}_k^*\}$, g_{ik}^* , x_*^k . Найдем движение \mathcal{S}_* -системы относительно \mathcal{S} -системы. Пусть в какой-то момент времени $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, принимаемый за начало отсчета времени, начало $\mathbf{0}_*$ системы \mathcal{S}_* , занимает положение точки $\tilde{\mathbf{0}}$ в \mathcal{S} -системе и определяется в ней вектором $\mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{0}}}$. Пусть векторы \mathbf{e}_k^* при $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ занимают положения векторов $\tilde{\mathbf{e}}_k$ в \mathcal{S} -системе. Тогда репер $\{\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{\mathbf{e}}_k\}$, заданный в \mathcal{S} -системе, будет играть ту же роль, что репер $\{\mathbf{0}_*, \mathbf{e}_k^*\}$ в \mathcal{S}_* -системе. Пусть вектор \mathbf{r}_* задает положение точки \mathbf{A}_* с координатами x_*^k в \mathcal{S}_* -системе. Тогда вектор $\tilde{\mathbf{r}} = x_*^k \tilde{\mathbf{e}}_k$, откладываемый от точки $\tilde{\mathbf{0}}$, будет задавать точку $\tilde{\mathbf{A}}$ в \mathcal{S} -системе, положение которой относительно репера $\{\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{\mathbf{e}}_k\}$ точно такое же, как положение точки \mathbf{A}_* относительно репера $\{\mathbf{0}_*, \mathbf{e}_k^*\}$. Пусть начало $\mathbf{0}_*$ системы \mathcal{S}_* движется произвольно относительно \mathcal{S} -системы и ее движение в \mathcal{S} -системе задается вектором положения $\mathbf{a}(\mathbf{t})$, причем $\mathbf{a}(\mathbf{0}) = \mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{0}}}$. Тогда положение точки \mathbf{A}_* системы \mathcal{S}_* в произвольный момент времени задается следующим вектором положения в \mathcal{S} -системе

$$\mathbf{r}(\mathbf{A}_*, \mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot (x_*^k \tilde{\mathbf{e}}_k), \quad (1.22)$$

где ортогональный тензор $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}^T(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = 1, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{0}) = \mathbf{E} \quad (1.23)$$

определен в \mathcal{S} -системе, как и векторы $\mathbf{a}(\mathbf{t})$ и $\tilde{\mathbf{e}}_k$, и задает поворот \mathcal{S}_* -системы относительно \mathcal{S} -системы.

Определение 1.9. *Преобразование (1.22), определяющее движение \mathcal{S}_* -системы относительно \mathcal{S} -системы, называется заменой системы отсчета.*

Преобразование (1.22) играет очень важную роль в механике, ибо многие физические величины, как, например, внутренняя энергия системы не зависят от выбора системы отсчета и потому должны быть инвариантны относительно замены системы отсчета. Данное требование позволяет установить

допустимый вид зависимости внутренней энергии от величин, определяющих ее. Эта техника очень хорошо разработана и широко применяется, но здесь мы о ней говорить не будем. Пусть точка A_* движется относительно S_* -системы и закон ее движения задан функциями $\mathbf{x}_*^k(t)$. Тогда вектор $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{x}_*^k(t)\tilde{\mathbf{e}}_k$ задает движение точки \tilde{A} в S -системе точно таким, каким видит наблюдатель в S_* -системе движение точки A_* . А вот наблюдатель в S -системе видит движение этой же точки A_* системы S_* как движение точки в S -системе, определяемое вектором положения

$$\mathbf{r}(A_*, t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{x}_*^k(t)\tilde{\mathbf{e}}_k). \quad (1.24)$$

Дифференцируя (1.24) по времени, получаем скорости и ускорения точки A_* относительно S -системы. Векторы

$$\mathbf{v}_* = \dot{\mathbf{x}}_*^k(t)\mathbf{e}_k^*, \quad \mathbf{w}_* = \ddot{\mathbf{x}}_*^k(t)\mathbf{e}_k^* \quad \left(\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} \right) \quad (1.25)$$

задают скорость и ускорение точки A_* в S_* -системе. Векторы

$$\tilde{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{x}}_*^k\tilde{\mathbf{e}}_k, \quad \tilde{\mathbf{w}} = \ddot{\mathbf{x}}_*^k(t)\tilde{\mathbf{e}}_k$$

задают скорость и ускорение точки \tilde{A} относительно репера $\{\tilde{O}, \tilde{\mathbf{e}}_k\}$ точно такими, какими видит наблюдатель в S_* -системе величины (1.25). Однако скорость и ускорение точки A_* относительно S -системы определяются по более сложным формулам, вытекающим после дифференцирования (1.24) по времени

$$\mathbf{v}(A_*) = \dot{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{A}) + \dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{x}_*^k(t)\tilde{\mathbf{e}}_k. \quad (1.26)$$

Последнее слагаемое в (1.26) обычно записывается в другой форме, с учетом уравнения Пуассона,

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{Q}(t),$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ называется вектором угловой скорости S_* -системы относительно S -системы.

Исключая из (1.26) тензор \mathbf{Q} с помощью уравнения Пуассона, а вектор $\dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{x}_*^k\tilde{\mathbf{e}}_k$ с помощью уравнения (1.24), получаем окончательное выражение для скорости точки A_* относительно S -системы

$$\mathbf{v}(A_*) = \dot{\mathbf{a}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{r}(A_*, t) - \mathbf{a}(t)] + \mathbf{Q}(t) \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \quad (1.27)$$

Выражение (1.27) также играет важную роль при установлении структуры многих характеристик физических систем, так как очень часто эти характеристики не должны зависеть от замены системы отсчета, т.е. менять своего

вида при любом виде векторов $\dot{\mathbf{a}}(\mathbf{t})$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ и ортогонального тензора $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$. Для инерциальных систем отсчета выражения (1.24) и (1.27) упрощаются, ибо

$$\mathbf{a}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{v}_0 \mathbf{t}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}, \quad (1.28)$$

и принимают вид

$$\mathbf{r}(\mathbf{A}_*) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{v}_0 \mathbf{t} + \tilde{\mathbf{r}}; \quad \mathbf{v}(\mathbf{A}_*) = \mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{A}}). \quad (1.29)$$

Первое из этих выражений называется преобразованием Галилея, а принцип относительности Галилея утверждает независимость (инвариантность) всех физических законов относительно преобразования (1.29). В механике это очень слабое требование и оно почти всегда выполняется автоматически. Правда, из требования инвариантности уравнения баланса энергии относительно преобразования (1.29) вытекает закон сохранения массы для закрытых систем, но многие воспринимают этот результат как самоочевидный. Имеется ряд других следствий, но все они носят достаточно тривиальный характер. Значительно более содержательные результаты дает требование инвариантности по отношению к преобразованию (1.24), (1.26). Однако это требование можно предъявить *не ко всем* физическим величинам и законам. Большинство физических величин зависят известным образом от выбора системы отсчета (кинетическая энергия, количество движения, кинетический момент и т.д.), но ни одна физическая величина не может зависеть от выбора системы координат (принцип объективности).

Примечание. Выше мы определили операцию переноса вектора единственным образом. При этом оказалась скрытой одна важная деталь: на самом деле выбор репера $\{\tilde{\mathbf{O}}, \tilde{\mathbf{e}}_k\}$ в \mathcal{S} -системе можно осуществлять произвольно, а единственное ограничение состоит в том, что должны выполняться условия $\tilde{\mathbf{e}}_k \cdot \tilde{\mathbf{e}}_m = g_{km}^*$.

1.5 Волновое уравнение. Идея ковариантности

Известно, что в основаниях классической электродинамики и, например, линейной динамической теории упругости лежат волновые уравнения. Принято считать, что в электродинамике волновое уравнение инвариантно относительно группы Лоренца, а в теории упругости волновое уравнение инвариантно относительно группы Галилея. Истолкование этого странного факта почему-то в литературе отсутствует. Ясно, что между волновыми уравнениями в электродинамике и в теории упругости существует какое-то различие,

которое надо четко установить и проанализировать. В электродинамике волновое уравнение имеет вид

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}. \quad (1.30)$$

В динамической теории упругости волновое уравнение записывается в форме

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c^2} \frac{d^2\Phi}{dt^2}. \quad (1.31)$$

На самом деле постоянные c в (1.30) и (1.31) различны. Кроме того, в динамической теории упругости имеется не одно, а два волновых уравнения типа (1.31) с различными значениями постоянной c . Поэтому во избежание недопониманий на уравнение (1.31) будем смотреть так: именно в такой форме было бы записано уравнение (1.30), если бы оно использовалось в рациональной механике. Как уже отмечалось в п.3, частые производные по времени в механике встречаются сами по себе, а не в виде комбинации (1.15), тогда и только тогда, когда смыслы полной и частной производной по времени совпадают. А это имеет место только при использовании систем координат, неподвижных относительно тела отсчета. В этом случае никакого различия в уравнениях (1.30) и (1.31) нет — они абсолютно идентичны. Однако при использовании подвижных координат уравнения (1.31) и (1.30) различаются самым существенным образом. В современной электродинамике отдают предпочтение уравнению (1.30), а в рациональной механике — уравнению (1.31). Едва ли можно сомневаться в том, что Дж.Максвелл отдал бы предпочтение уравнению (1.31), ибо только так и понимались все производные по времени в третьей четверти XX века. Выясним, какое из уравнений (1.30) и (1.31) правильное с точки зрения рациональной механики и почему. Ответ прост: уравнение (1.31) удовлетворяет принципу объективности, а уравнение (1.30) — не удовлетворяет. Поэтому в рациональной механике уравнение (1.30) неприемлемо. Почему физики считают уравнение (1.30) приемлемым, должны ответить они сами. Чтобы проиллюстрировать невыполнение принципа объективности для уравнения (1.30), рассмотрим простой пример. Сначала выберем неподвижную декартову систему координат x, y, z в тела отсчета и возьмем функцию

$$\Phi = (x, y, z, t) = Ax, \quad A = \text{const}. \quad (1.32)$$

Видно, что эта функция является решением как уравнения (1.30), так и уравнения (1.31). Решение (1.32) имеет простой физический смысл: в физике —

это электростатический потенциал между двумя параллельными однородно заряженными плоскостями, а в теории упругости — это перемещение точек однородного слоя, растягиваемого постоянными нормальными напряжениями. Совершенно ясно, что решение (1.32) должно оставаться решением и при использовании любой другой системы координат, в том числе и подвижной. Введем подвижную систему координат

$$x' = a \cos \omega t + x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (1.33)$$

Очевидно, что решение (1.32) должно остаться решением и в системе координат со штрихами

$$\Phi(x' - a \cos \omega t', y', z', t') = A(x' - a \cos \omega t') \equiv \Phi'(x', y', z', t'). \quad (1.34)$$

Функция $\Phi'(x', y', z', t')$ должна удовлетворять уравнениям

$$\Delta' \Phi' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t'^2}, \quad \Delta' \Phi' = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \Phi'}{dt'^2} (t' \equiv t). \quad (1.35)$$

Оператор Лапласа Δ' в системе координат со штрихами всегда совпадает с таковыми в исходной: $\Delta' = \Delta$. Поэтому левые части уравнений (1.35) обращаются в нуль для функции (1.34). Вычислим правые части:

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t'^2} = A a \omega^2 \cos \omega t' \neq 0;$$

$$\frac{d\Phi'}{dt'} = \frac{\partial \Phi'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial \Phi'}{\partial t'} = A a \omega (-\sin \omega t + \sin \omega t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \Phi'}{dt'^2} = 0.$$

Таким образом, функция Φ' не удовлетворяет первому из уравнений (1.35), а второму — удовлетворяет, как это и должно быть в соответствии с принципом объективности. Заметим, что речь идет о заменах системы координат, а не систем отчета, где требуется дополнительное обоснование того, как связаны скалярные функции Φ и Φ_* , заданные в разных системах отсчета. Итак, с точки зрения рациональной механики уравнения (1.30) можно использовать только в неподвижных системах координат. Поэтому рассматривать вопрос о том, как ведет себя уравнение (1.30) при преобразованиях Лоренца можно только в чисто математическом, но не в физическом понимании, ибо преобразованиями Лоренца вводятся в рассмотрение подвижные координаты. Уравнение (1.31) сохраняет свой математический и физический смысл при любых преобразованиях координат. Как это следует делать, указано в конце п.3.

Обсудим идею ковариантности основных уравнений физики при преобразованиях системы координат. Трудно понять, почему этой идее придается столь большое значение в физике. Ведь ясно с самого начала, что идея ковариантности не может играть значительной роли в физике. Например, из дифференциальной геометрии хорошо известно, что инвариантные, т.е. не зависящие от выбора системы координат, дифференциальные операторы не обладают свойством ковариантности. Почему же в физике, помимо инвариантности основных уравнений, нужно требовать еще и ковариантности этих уравнений? Согласимся на время с идеей ковариантности и посмотрим, относительно каких линейных преобразований координат и времени уравнение (1.30) обладает свойством ковариантности. Последняя означает, что уравнение (1.30), записанное в двух различных системах координат x_1, x_2, x_3, t и x'_1, x'_2, x'_3, t' , имеет совершенно одинаковый вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x_3'^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t'^2}, \quad (1.36)$$

где

$$\Phi[x_1(x', t'), x_2(x', t'), x_3(x', t'), t(x', t')] \equiv \Phi'(x'_1, x'_2, x'_3, t'). \quad (1.37)$$

Напомним, что сейчас речь идет о чисто математических операциях, лишенных физического смысла, так как уравнение (1.30) справедливо только для неподвижных относительно тела отсчета систем координат. Здесь же в рассмотрение вводятся подвижные системы координат. Далее удобнее будет предварительно сделать линейную замену независимых переменных

$$y_1 = x_1 - ct, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_1 + ct. \quad (1.38)$$

Ясно, что такая замена переменных не может испортить дело, так как невырожденные линейные преобразования образуют группу. В новых переменных уравнения (1.36) принимают вид

$$4 \frac{\partial F}{\partial y_1 \partial y_4} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_3^2} = 0, \quad 4 \frac{\partial^2 F'}{\partial y_1'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y_2'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y_3'^2} = 0, \quad (1.39)$$

где

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi \left(\frac{y_1 + y_4}{2}, y_2, y_3, \frac{y_4 - y_1}{2c} \right) \equiv F(y_1, y_2, y_3, y_4),$$

а связь отображений F и F' та же, что и в (1.37).

Выясним, при каких линейных заменах переменных вида

$$y'_1 = \alpha y_1 + \beta_* y_4, \quad y'_2 = y_2, \quad y'_3 = y_3, \quad y'_4 = \beta y_1 + \gamma y_4 \quad (\alpha\gamma - \beta\beta_* \neq 0) \quad (1.40)$$

будут справедливы уравнения (1.39). Имеем легко проверяемое тождество

$$4 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_4} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_3^2} = 4 \left(\alpha\beta_* \frac{\partial^2 F'}{\partial y_1'^2} + \gamma\beta \frac{\partial^2 F'}{\partial y_4'^2} \right) + 4(\alpha\gamma + \beta\beta_*) \frac{\partial^2 F'}{\partial y_1' \partial y_4'} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y_2'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y_3'^2} = 0.$$

Для справедливости (1.39) необходимо выполнение равенств:

$$\alpha\beta_* \frac{\partial^2 F'}{\partial y_1'^2} + \gamma\beta \frac{\partial^2 F'}{\partial y_4'^2} = 0, \quad \alpha\gamma + \beta\beta_* = 1. \quad (1.41)$$

Поскольку в общем случае функция F' не может одновременно удовлетворять двум разным уравнениям (второму из (1.39) и (1.41), то окончательно для определения постоянных $\alpha, \beta, \beta_*, \gamma$ получаем систему

$$\alpha\beta_* = 0, \quad \gamma\beta = 0, \quad \alpha\gamma + \beta\beta_* = 1, \quad \alpha\gamma - \beta\beta_* \neq 0. \quad (1.42)$$

Эта система имеет всего два семейства решений:

$$\alpha \neq 0, \quad \gamma = 1/\alpha, \quad \beta = \beta_* = 0; \quad (1.43)$$

$$\alpha = \gamma = 0, \quad \beta \neq 0, \quad \beta_* = 1/\beta. \quad (1.44)$$

Возвращаясь от переменных y_1, y_2, y_3, y_4 к переменным x_k, t , получаем два набора линейных преобразований координат, удовлетворяющих принципу ковариантности

$$x'_1 = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha} x_1 + \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha} ct, \quad t' = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha} t + \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha} \frac{x_1}{c}, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3; \quad (1.45)$$

$$x'_1 = \frac{1 + \beta^2}{2\beta} x_1 + \frac{1 - \beta^2}{2\beta} ct, \quad t' = -\frac{1 + \beta^2}{2\beta} t - \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \frac{x_1}{c}, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad (1.46)$$

где α и β — любые вещественные числа, отличные от нуля. Ясно, что преобразования (1.45) и (1.46) не сводятся одно к одному. Преобразование Лоренца есть частный случай преобразования (1.45), получающееся только при положительных α с помощью замены

$$\alpha = \sqrt{(1 - \frac{v}{c}) / (1 + \frac{v}{c})}. \quad (1.47)$$

Таким образом, уравнение (1.30) ковариантно не только относительно преобразований Лоренца, но и относительно более общих преобразований (1.45), (1.46), полное истолкование которых здесь не затрагивается. Выделять из (1.45) и (1.46) только одно преобразование Лоренца, да еще без достаточных у тому оснований, как-то не эстетично.

Итак, волновое уравнение, записанное в форме (1.31), инвариантно как относительно преобразования Галилея, так и относительно значительно более общих замен систем координат (но не систем отсчета!). Волновое уравнение в форме (1.30) может использоваться в физике только тогда, когда система координат неподвижна относительно инерциального тела отсчета. Ковариантность этого уравнения относительно преобразований Лоренца есть чисто математический факт, не переносимый на физические явления.

1.6 Уравнения Максвелла

Ниже рассматриваются уравнения Максвелла в пустоте, ибо включение токов требует обсуждения вопросов, не имеющих прямого отношения к теме данной работы. В современной физике уравнения Максвелла в пустоте записываются в виде:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.48)$$

В механике эти же уравнения записывались бы немного иначе:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{E}}{dt}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.49)$$

Так же, как и в случае с волновыми уравнениями, различие заключается в том, что в (1.48) входят в частные производные по времени, а в (1.49) — полные производные по времени. Если используются неподвижные системы координат, то уравнения (1.48) и (1.49) неразличимы между собой. Однако при использовании подвижных координат эти уравнения существенно различны. Именно это различие и приводит к тому, что для уравнений (1.48) принцип относительности Галилея не выполняется, а для уравнений (1.49) выполняется. С точки зрения механики, уравнения (1.48) в общем случае подвижных координат неприемлемы, так как они не удовлетворяют принципу объективности. Покажем это на простом примере. Рассмотрим электрическое поле бесконечно длинного однородно заряженного цилиндра. Как известно, в цилиндрической системе координат оно имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{A}{r} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad A = \text{const}. \quad (1.50)$$

Решение (1.50) удовлетворяет как уравнениям (1.48), так и уравнениям (1.49). Введем в рассмотрение пульсирующую цилиндрическую систему координат

$$\mathbf{r}' = (2 + \cos \omega t)\mathbf{r}, \quad \varphi' = \varphi, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (1.51)$$

Решение (1.50) в штрихованной системе координат имеют вид

$$\mathbf{E} = \frac{A(2 + \cos \omega t')}{r'} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (1.52)$$

Сами векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} при этом, разумеется, не меняются. Подставляя (1.52) в (1.48) и (1.49), убеждаемся, что левые части этих уравнений обращаются в нуль, так как левые части (1.48) и (1.49) не зависят от выбора системы координат. Обращаются в нуль и правые части уравнения (1.49), так как они тоже не зависят от выбора подвижной системы координат, не меняющей время: $t' = t$. А вот левые части уравнений (1.48) в нуль не обращаются, так как

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\omega A \sin \omega t}{r'} \mathbf{e}_r \neq \mathbf{0},$$

т.е. уравнения (1.48) не выполняются. Но замена (1.51) — это всего лишь тривиальный способ изменения представления решения. Физическое содержание задачи от этого не зависит. Поэтому уравнения (1.48) применимы только при использовании системы координат, неподвижных относительно тела отсчета. Отсюда следует, что, во-первых, уравнения (1.48) и не должны удовлетворять принципу относительности Галилея и, во-вторых, физически бессодержательно рассматривать вопрос о том, как они ведут себя по отношению к преобразованию Лоренца. Невозможно сомневаться в том, что Дж.Максвелл в качестве своих уравнений признал бы именно (1.49), но не уравнения (1.48). Каким же образом объясняют в литературе по физике переход от уравнений (1.49) к уравнениям (1.48)? В большинстве случаев вообще не объясняют. В учебнике [4], (с.233) после “правильно” записанного уравнения (29), которое совпадает с первым из уравнений системы (1.49), следуют слова: “Так как \mathbf{B} может зависеть от положения и от времени, мы напишем $\partial \mathbf{B} / \partial t$ вместо $d\mathbf{B} / dt$ ”. Однако, как подробно показывалось в п.3 — формула (1.15) — это допустимо только при использовании неподвижных систем координат.

Обратимся к обсуждению принципа относительности Галилея применительно к уравнениям Максвелла. В принципе относительности речь идет о разных системах отсчета, а не о разных системах координат. Различие здесь принципиально и неустранимо. Например, вектор скорости частицы \mathbf{A} отно-

сительно какой-то системы отсчета имеет определенное значение, не зависящее от системы координат. Однако скорость одной и той же частицы в различных инерциальных системах отсчета выражается совершенно разными векторами, — формула (1.29) — которые различаются не только по направлению, определяемому по отношению к отсчетному реперу, но и по модулю. Часто приходится читать, что классическая механика — это механика малых скоростей. Может быть, в каком-то смысле (пока не ясном) такое выражение и правильно. Однако в рациональной механике нет понятий больших и малых скоростей. Всегда найдутся такие инерциальные системы отсчета, относительно которых скорость одной и той же частицы может быть в один и тот же момент времени и сколь угодно большой, и сколь угодно малой. Возвращаясь к сравнению понятий систем координат и систем отсчета, замечаем, что первое из них носит чисто формальный характер, а второе является физическим утверждением, содержащим в себе правило соответствия между одними и теми же величинами, заданными в разных системах отсчета. Есть разные в этом смысле величины. В механике применяется аксиома о том, что масса частицы не зависит от выбора системы отсчета. Именно поэтому масса в механике не может зависеть от скорости. Кинетическая энергия частицы, также являющаяся скалярной величиной, тем не менее, зависит от выбора системы отсчета. То же самое можно сказать о векторах и тензорах. Поэтому прежде чем выяснить справедливость (или несправедливость) принципа Галилея, необходимо указать правило, связывающие одни и те же физические величины, заданные в разных системах отсчета. Если говорить об уравнениях Максвелла, то надо указать, как связаны векторы электрического \mathbf{E} и магнитного полей \mathbf{B} полей, заданные в разных системах отсчета. Трудность здесь в том, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} , вообще говоря, зависят от скоростей движения зарядов. Скорости зарядов различны по отношению к разным системам отсчета. Поэтому может показаться, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} должны быть не индифферентными, т.е. зависеть от выбора системы отсчета. Однако нужно иметь в виду следующее. Рассмотрим частицу A_1 . Пусть ее скорости в инерциальных \mathcal{S} -системе и \mathcal{S}_* -системе выражаются векторами \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_1^* соответственно. Как мы уже знаем, связь между этими векторами дается формулой

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}_1, \quad (1.53)$$

где \mathbf{v}_0 — скорость \mathcal{S}_* -системы относительно \mathcal{S} -системы, представленная в \mathcal{S} -системе. Как видим, в (1.53) входит вектор \mathbf{v}_0 , что и указывает на не индифферентность вектора скорости. Рассмотрим еще одну частицу A_2 , для нее справедливо такое же соотношение (1.53), как для A_1 . Найдем относи-

тельную скорость частицы A_2 относительно частицы A_1 :

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}_1) = \tilde{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\mathbf{v}}_1. \quad (1.54)$$

Таким образом, относительные скорости частиц оказываются уже индифферентными векторами, т.е. векторами, безразличными к выбору системы отсчета.

Примем теперь во внимание, что электромагнитное поле связано не с движением зарядов вообще, а только с движениями зарядов относительно друг друга. Это так, ибо в противном случае нейтральных тел вообще не существовало бы. Поскольку относительные скорости индифферентны (безразличны) к выбору инерциальных систем отсчета, то можно думать, что и векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} должны быть индифферентными. Пусть поле характеризуется векторами \mathbf{E} и \mathbf{B} в S -системе, и векторами \mathbf{E}_* и \mathbf{B}_* S_* -системе. Примем аксиому.

Аксиома E1(Г.Герц): *векторы электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полей индифферентны, т.е. их значения в разных системах отсчета S и S_* связаны соотношением*

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{B} = (-1)^\alpha \tilde{\mathbf{B}}, \quad (1.55)$$

где $\alpha = 0$, если S -система и S_* -система имеют одинаковые ориентации; $\alpha = 1$, если они имеют разные ориентации.

Эта аксиома не может быть опровергнута логическими доводами, хотя ее экспериментальное опровержение, видимо, возможно, но крайне маловероятно. Заметим, что опыты Майкельсона и их модификации к замене систем отсчета, равно как и к замене систем координат не имеет никакого отношения. Запишем уравнения Максвелла (1.49) в S_* -системе. Для этого нужно просто поставить у всех величин, входящих в (1.49), звездочки. Далее перенесем эти уравнения в соответствии с указаниями п.4 в S -систему. В результате получим

$$(-1)^\alpha \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\tilde{c}} \frac{d\tilde{\mathbf{B}}}{dt}, \quad \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad (-1)^\alpha \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} = -\frac{1}{\tilde{c}} \frac{d\tilde{\mathbf{E}}}{dt}, \quad \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0. \quad (1.56)$$

Здесь принято, что $c_* = \tilde{c}$, т.е. при переносе скаляра из одной системы отсчета в другую он не меняется (это верно даже для тех скаляров, которые зависят от выбора системы отсчета, т.е. не следует путать операцию переноса, как чисто формальную вещь, с операцией замены системы отсчета, к которой мы еще не приступали). Множитель $(-1)^\alpha$ в (1.56) появился

из-за того, что в разноориентированных системах отсчета векторное произведение определяется по-разному. Теперь мы приступаем к операции замены системы отсчета. Уравнения (1.56) выражают в \mathcal{S} -системе то, что видит наблюдатель в \mathcal{S}_* -системе. Наблюдатель в \mathcal{S} -системе видит не (1.56), а уравнения (1.49). Замена системы отсчета сводится к тому, что необходимо провести замену системы координат в (1.56) в согласии с требованием Галилея (1.29) и требованиями аксиомы E1, т.е. условиями (1.55). Очевидно, что при этом справедливы равенства $\nabla = \tilde{\nabla}$, $\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}}$, так как они выполняются для любых замен систем координат, как подвижных, так и неподвижных. Подставляя (1.55) в (1.56) и учитывая тождества $\nabla = \tilde{\nabla}$, $\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}}$ приходим к уравнениям (1.49). В этом и состоит принцип относительности Галилея. Никакой пользы из этого факта извлечь не удастся, как, впрочем, этого и следовало ожидать. Напомним, что Г. Герц уже получал обобщение уравнений Максвелла, удовлетворяющее принципу относительности Галилея.

1.7 Рациональная механика и электродинамика

Обратимся теперь к обсуждению самого важного и до сих пор нерешенного механикой вопроса о причинах логической несовместимости классической механики и электродинамики. Дело здесь совсем не в принципе относительности Галилея. Причина лежит гораздо глубже и своими корнями уходит на два тысячелетия назад. Кажется необходимым хотя бы кратко затронуть один аспект исторического развития механики.

Основы рациональной механики были заложены еще Архимедом, среди многих достижений которого выделяются два фундаментальных положения, относящихся к равновесию тел: а) уравнение баланса сил и б) уравнение баланса моментов (принцип рычага). Архимед формулирует эти два положения как независимые законы природы. Все дальнейшее развитие механики сопровождалось поисками ответа на вопрос: “Действительно ли баланс сил и баланс моментов являются независимыми утверждениями?” Поначалу эта проблема исследовалась только в статике. Начиная с конца XVI и вплоть до конца XVIII века шли непрерывные атаки на принцип рычага Архимеда. Было найдено много более или менее строгих доказательств принципа рычага и даже утвердилось мнение, что баланс моментов не является независимым утверждением. Это мнение представлено во многих современных учебниках по механике. Удивительно, но самого главного обстоятельства в приводимых доказательствах принципа рычага “не замечают” до сих пор. А именно, во всех этих доказательствах существенно используются соображе-

ния симметрии. Но с появлением работы Э.Нетер (1918 г.) уже всем понятно, что соображения симметрии вполне могут заменить требования баланса сил и моментов. Поэтому принцип рычага есть независимое от баланса сил утверждение.

Современная рациональная механика имеет, можно сказать, точную дату рождения (1638 г.), и ее основателем по праву считается Галилею Галилей (1564 – 1642 гг.). Открытие Галилеем принципа инерции (1638 г.) является главным событием в классической физике, из которого уже естественно вытекает закон, впоследствии названный вторым законом Ньютона. Частная формулировка этого закона также открыта Галилеем, поэтому Ньютон называет его законом Галилея. В 1687 году появляются “Математические начала натуральной философии” Исаака Ньютона (1643 – 1727 гг.). Несмотря на то, что в этом труде не было представлено новых фундаментальных принципов, за исключением 3-го закона, “Начала” сыграли огромную роль в истории механики, ибо это была первая попытка систематического изложения механики. Конечно, главным в “Началах” является закон всемирного тяготения и следствия из него. С точки зрения фундаментальных принципов, главной заслугой Ньютона является постановка задачи о необходимости построения механики на основе ясно выраженных исходных постулатов, но самих этих постулатов Ньютон не знал. Ньютону удалось разрешить только ограниченную задачу: как по известным движениям находить силы. Многие крупнейшие ученые (например, Р.Кирхгоф) даже через два столетия были настолько очарованы этим успехом Ньютона, что всерьез считали 2-й закон Ньютона определением силы. Находить по заданным силам движение Ньютон не только не умел, но даже считал, что сформулированных в “Началах” законов для этого явно недостаточно. Итог своих воззрений на механику сформулировал сам И. Ньютон в 1717 году [5], с.301: “*Vis inertia* есть пассивный принцип, посредством которого тела пребывают в их движении или покое, получают движение¹, пропорциональное приложенной к ним силе, и сопротивляются настолько же, насколько сами встречают сопротивление (здесь формулировка всех трех законов, П.Ж.). По одному этому в мире еще не могло бы произойти движение. Был необходим иной принцип, чтобы привести тела в движение и раз они находятся в движении — требуется еще один принцип для сохранения движения. Ибо из различного сложения двух движений вполне ясно, что в мире не всегда имеется одно и то же количество движения. Если два шара, соединенные тонким стержнем, вращаются вокруг общего центра тяжести равномерным движением, в

¹Под движением здесь и ниже Ньютон понимает то, что сейчас называется количеством движения.

то время как центр равномерно движется по прямой линии, проведенной в плоскости их кругового движения, то сумма движений двух шаров в том случае, когда шары находятся на прямой линии, описываемой их центром тяжести, будет больше, чем сумма их движений, когда они находятся на линии, перпендикулярной к этой прямой. Из этого примера ясно, что движение может получаться и теряться.” Эти слова были написаны через 30 лет после выхода “Математических начал”, и они дают ясное представление о состоянии механики того времени. Столь длинная цитата кажется необходимой, ибо искажения действительной истории механики в литературе весьма значительны. Ньютон достаточно велик без того, чтобы приписывать ему то, чего он не делал. Книга Э. Маха [6], где впервые появилось утверждение, получившее затем большое распространение, о том, что “после Ньютона в механику не было внесено ничего принципиально нового”, является сборником фантазий самого Э. Маха.

Задача, поставленная Ньютоном, была в значительной мере решена Л.Эйлером (1707 – 1783 гг.). На Эйлера огромное влияние оказали В.Лейбниц, Я. и И.Бернулли, Г.Гюйгенс, Ж.Даламбер. Существенная деталь — современная форма закона Галилея – Ньютона — была открыта К.Маклореном в 1742 г. Именно Леонард Эйлер ввел почти все понятия, которыми пользуется современная механика (исключая, разумеется, гамильтонову механику). То, что сегодня называется ньютоновской механикой, было построено Л.Эйлером в 1735 – 1758 гг. Опустив все подробности, отметим только формулировку 1-го закона динамики (1756 г.): “Скорость изменения количества движения произвольной системы равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему”. Эта формулировка несравнимо сильнее закона Галилея – Ньютона. В частности, из нее следует 3-й закон Ньютона. Однако дело даже не в первом законе динамики, а именно в строгом введении основных понятий, включая понятие силы, уничтожившее пропасть между статикой и динамикой. Все построения проведены Эйлером с такой легкостью и изяществом, с такой естественностью, что многие современники (и не только современники) даже не поняли, что на самом деле произошло. В 1771 году Л.Эйлер окончательно установил, что уравнение баланса количества движения и кинетического момента — суть независимые законы механики. А это означало принципиальную неполноту ньютоновской механики. Возникла новая механика — механика Эйлера, в которой место материальной точки в ньютоновской механике заняло абсолютно твердое тело. С этой поры “элементарная” частица наделяется не только количеством движения, но и собственным кинетическим моментом. Эйлер формулирует

второй закон динамики. Его современная форма такова: “Скорость изменения кинетического момента произвольной системы равна главному вектору внешних моментов и моментов внешних сил, действующих на эту систему”. В механике Эйлера вводятся воздействия двух типов. Воздействия, выражаемые полярными векторами, называются силами. Воздействия, выражаемые аксиальными векторами, называются моментами.

Мы уже вплотную подошли к интересующей нас точке разрыва между механикой и электродинамикой, но необходимо сказать еще несколько слов. Видимо, единственным человеком, осознавшим открытие Эйлера, был Жозеф Луи Лагранж (1736 – 1813 гг.), но по ряду причин он не захотел с ним согласиться. В попытках опровергнуть открытие Эйлера, Лагранж вновь и вновь обращается к доказательству принципа рычага и доводит это доказательство до высокой степени совершенства, хотя избавиться от соображений симметрии ему, разумеется, не удается. Гений Лагранжа позволил ему насытить ньютонову механику новыми идеями, плодотворность которых надолго отвлекла всех механиков от основных принципов и обратила их внимание на решение важнейших конкретных проблем, включая проблемы механики сплошных сред. Так и получилось, что резко продвинув вперед одни аспекты механики, Лагранж почти на столетие задержал прогресс механики в других, более важных аспектах. Воистину прав сказавший, что гений ученого оценивается тем, на сколько лет он задержал развитие науки. Правда, это верно только в отношении гениев. Есть еще сверхгении, идеи которых входят в науку навсегда, но сверхгении крайне редки. В истории физики ими были: Архимед, Галилео Галилей, Леонард Эйлер и Джеймс Клерк Максвелл.

Обратимся к описанию проблемы, которую ставит перед механикой электродинамика Максвелла.

В ньютоновской механике исходным объектом является материальная точка, которая наделяется единственным свойством — массой. Иными словами, в ньютоновской механике задействованы частицы только одного сорта. В электродинамике существенную роль играют частицы трех сортов: нейтральные, положительные и отрицательные, которые наделяются не только массой, но и зарядом. Природа заряда до сих пор точно не известна, как, впрочем, и природа массы. Поэтому важным здесь является не то, какими качествами обладает частица, а число несводимых друг к другу качеств, которыми наделена частица, т.е. важна “размерность” частицы. В ньютоновской механике “размерность” элементарной частицы равна единице, “размерность” абсолютно твердого тела в макромеханике равна четырем, а в электродинамике “размерность” частицы должна быть заведомо боль-

ше четырех, чтобы включить заряд. Уже по одной этой причине очевидно, что логический разрыв между ньютоновской механикой и электродинамикой неизбежен и неустраним. Максвелл ясно осознавал этот разрыв и пытался его устранить, изобрел электродинамику с “колесиками”. Может быть напрасно в дальнейшем эти усилия никем не были продолжены. Нельзя забывать, что сверхгении знают намного больше того, что они в состоянии выразить в терминах рациональной науки. Так или иначе, но Максвелл не сумел преодолеть разрыв, существующий между механикой и электродинамикой. Вместо этого он просто “перепрыгнул” через пропасть и написал уравнения электродинамики такими, какими они должны быть на основании известных фактов. Если бы в эти уравнения входило бы только электрическое поле, то все было бы просто и никакого разрыва с ньютоновской механикой не было бы. Однако в уравнения Максвелла входит вектор магнитного поля. Судя по многим признакам, Максвелл воспринимал его как моментное воздействие. В ньютоновской механике моменты порождаются силами: если нет сил, то и нет моментов. В электродинамике дело обстоит иначе: электрическое и магнитное поля в общем случае не сводимы одно к другому, магнитное поле может существовать при отсутствии электрического поля и наоборот. Вот именно в этом пункте Максвелл и вступил в вопиющее противоречие с ньютоновской механикой. Видимо, это был первый тревожный сигнал, когда реальные факты указывали на принципиальную неполноту ньютоновской механики. Однако никто, кроме Максвелла, не услышал этого сигнала. Вторично он прозвучал в 1918 году, когда Э.Нетер показала, что баланс сил вытекает из однородности пространства, а баланс моментов следует из изотропности пространства. Теорема Э.Нетер обратима. Поэтому, если допустить, что баланс моментов есть следствие баланса сил, то сразу приходим к абсурдному выводу, что изотропия пространства (системы отсчета) есть следствие его однородности.

Механика Эйлера получила свое развитие только в XX веке, главным образом, в последние 40 лет. В настоящее время она обрела вполне оформившуюся структуру в механике сплошных сред. Однако попыток объединения механики и электродинамики в рамках механики Эйлера до сих пор не предпринято.

Какие же черты механики Эйлера позволяют надеяться, что разрыв между механикой и электродинамикой может быть устранен? Прежде всего, это модель “элементарной” частицы, которая в механике Эйлера аналогична абсолютно твердому телу в том смысле, что ее кинетическая энергия является квадратичной формой линейной и угловой скоростей частицы. Коэффи-

циенты этой квадратичной формы называются тензорами инерции, а “размерность” частицы равна 10. В зависимости от строения энергии частицы различаются по сортам. У нейтральных частиц отсутствует перекрестный член в энергии: эти частицы вполне аналогичны абсолютно твердому телу в макромеханике, а трансляционные и вращательные движения у них как бы не взаимодействуют между собой. У “положительных” и “отрицательных” частиц присутствует перекрестный член в энергии, причем один сорт частиц отличается от другого строением перекрестного члена, т.е. у обсуждаемых частиц взаимодействие трансляционных и вращательных движений неустранимо. Прямой аналогии этих частиц с абсолютно твердым телом в макромеханике не существует, а композиция “положительных” и “отрицательных” частиц приводит к нейтральной частице. Любопытно, что если эти частицы действительно можно отождествить с заряженными частицами, то ни электрон, ни протон нельзя представить себе в виде маленьких шариков. Более того, их вообще нельзя вообразить в виде обычного маленького твердого тела. Имеется еще одна особенность, отличающая “электрон” от маленького абсолютно твердого тела: очень похоже на то, что не существует инерциальной системы отсчета, в которой траектория “центра масс” движущегося по инерции “электрона” была бы прямолинейной. Впрочем, без формул все это объяснить довольно трудно. Специфична в механике Эйлера аксиоматика для воздействий, но во многих отношениях она даже проще, чем в ньютоновской механике. Если для силовых и моментных воздействий ввести потенциалы, то они очень похожи на потенциалы в электродинамике, и наличие производных по времени в уравнениях Максвелла существенно связано с наличием перекрестного члена в кинетической энергии частиц. К сожалению, в данный момент автор не может утверждать, что в рамках механики Эйлера разрыв между механикой и электродинамикой действительно может быть устранен. Вопросов пока больше, чем ответов на них. Зато совершенно ясна необходимость решения следующей дилеммы.

Либо механика сумеет включить в свои структуры электродинамику, и тогда она подтвердит свое право считаться фундаментальной наукой, либо механика должна признать свою принципиальную ограниченность и согласиться с ролью важной прикладной науки. Правда, в последнем случае должна быть построена какая-то другая наука, которая могла бы заменить механику и каковой пока что не просматривается.

Список литературы

- [1] **Мандельштам Л.И.** Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 437 с.
- [2] **Фок В.А.** Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИФМЛ, 1961. 563 с.
- [3] **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
- [4] **Парселл Э.** Электричество и магнетизм. Берклевский курс физики. В 5т., М.: Наука, 1983. Т.II. 415 с.
- [5] **Ньютон И.** Оптика. М.: ГИТТЛ, 1954. 367 с.
- [6] **Мах Э.** Механика (Историко-критический очерк ее развития). СПб.: Общественная польза, 1909. 448 с.

2. Основные положения эйлеровой механики

2.1 Введение

Основой классической механики, лежащей вне логических структур, является убеждение в возможности объективного описания окружающего нас мира. Главной особенностью трехтысячелетнего развития механики является ее эволюционный характер, при котором все основные структуры механики формировались и углублялись многими поколениями ученых. Когда тому или иному утверждению механики приписываются имена ученых, то это, как правило, не имена единоличных авторов, а дань великим заслугам этих ученых. Поэтому современные формулировки многих принципов значительно отличаются от первоначальных, но еще значительно отличаются современные формы их применения. Заметить эти изменения удается только на больших интервалах времени. Революция в физике, произошедшая в начале XX века, не изменила эволюционного характера развития механики, но резко обострила внимание к ее логическим основам. Вместе с тем начал стремительно расти разрыв между новейшей физикой и классической механикой. Последняя не приняла многих концепций новейшей физики из-за их логической непоследовательности. С другой стороны, к концу XIX века уже отчетливо проявилось, что классической механике чего-то недостает. Никакое логическое совершенство, которое к тому же недостижимо, не могло затушевать того, что существовал целый ряд фактов, которые классическая механика не могла не только объяснить, но даже и полноценно описать. Главными здесь были явления электромагнетизма, которые не вписывались без очевидных натяжек в структуры механики. Другим фактом являлось “печальное поведение” (выражение А.Ю.Ишлинского) Меркурия. Были, разумеется, и другие факты. Сказанное, однако, не привело ни к кризису механики, ни к ее застою. Напротив, с конца XIX века начало развиваться некое расширение классической механики, связанное с включением в сферу действия механики не только трансляционных (обычных) движений, но и так называемых спинор-

ных движений. Без последних, по воззрениям Дж.Максвелла, описание электромагнитного поля невозможно. Новейшая физика пошла по другому пути и трактует магнитное поле как чисто релятивистский эффект, что неудивительно, ибо в новейшей физике и электрическое и магнитное поля вводятся через понятие силы. Другой важной особенностью, не учитываемой классической механикой, является отсутствие в ней понятия излучения, с помощью которого описывается взаимодействие электромагнитного поля с веществом. Описанные и некоторые другие особенности классической механики были почему-то объявлены органическими пороками классической механики и новейшая физика заявила о “решительном отказе от воззрений классической механики при описании явлений микромира”. Здесь не место вдаваться в дискуссии. Отметим только, что истинные возможности механики намного больше тех, о которых говорят физики. Цель данного краткого сообщения как раз и состоит в том, чтобы дать набросок взглядов современной рациональной механики. Огромный вклад в формирование этих взглядов внес Леонард Эйлер, который впервые указал на принципиальную неполноту ньютоновской механики. Показательно, что роль Л. Эйлера долгое время оставалась неосознанной. Например, Г. Герц [8] пишет: “...главные вехи (развития механики) обозначены именами Архимеда, Галилея, Ньютона, Лагранжа.” Как видим, имя Эйлера в этом перечне даже не фигурирует. Подобная позиция присуща и подавляющему большинству современных работ по теоретической физике. Автор полагает, что если бы Дж. Максвелл, Г. Лоренц и другие крупнейшие физики XIX-го века были осведомлены о результатах позднего Л. Эйлера, то облик современной физики мог бы быть совершенно другим. К сожалению, резко негативную роль сыграла здесь талантливая, но крайне легковесная, книга Э. Маха [9].

В заключение этого пункта подчеркнем, что, несмотря на обилие аксиом, изложенное ниже ни в коем случае нельзя рассматривать как попытку аксиоматического построения механики. Вполне очевидно, что так называемая шестая проблема Гильберта принципиально не допускает решения.

2.2 Пространство, время, движения

2.2.1 Тела отсчета. Время. Системы отсчета

Наиболее глубинными представлениями в механике являются представления о пространстве и времени. Долгое время эти представления опирались на чисто интуитивное восприятие этих понятий. В частности, об-

щеизвестны ньютоновские определения абсолютного пространства и времени [1]. Основным в них является постулат об объективном характере пространства и времени. Однако использовать ньютоновские определения в рациональных построениях невозможно, ибо в однородном, лишенном всяких меток, пространстве невозможно обнаружить движение, равно как невозможно дать рациональное истолкование равномерному ходу времени. Все это подробно объясняется самим Ньютоном. По этой причине в рациональной механике вводятся некие рукотворные конструкции, называемые телами отсчета. Для этого в рассмотрение вводится репер с вершиной, обозначаемой меткой O , и тремя некопланарными “векторами” \mathbf{e}_k , то есть тремя стрелками, сделанными, например, из дерева. Этот репер никак не привязан к неподвижному абсолютному пространству, ибо у нас нет возможности сделать это. “Векторы” \mathbf{e}_k нельзя назвать настоящими векторами, ибо невозможно определить их направления в абсолютном (неподвижном) пространстве. Более того, невозможно сказать, остаются ли эти направления фиксированными относительно абсолютного пространства или они как-то меняются. Зато существование “векторов” \mathbf{e}_k позволяет ввести в рассмотрение истинные векторы, направление которых относительно “векторов” \mathbf{e}_k определяется однозначно. Итак, ввели репер $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Возьмем дополнительно три одномерных множества $-\infty \leq x^k \leq \infty$, ($k = 1, 2, 3$), где числа x^k безразмерны, и введем вектор положения

$$\mathbf{r} = x^k \mathbf{e}_k \equiv x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3, \quad -\infty \leq x^k \leq \infty. \quad (2.1)$$

Будем считать, что вектор \mathbf{r} , отвечающий неким фиксированным значениям чисел x^k , определяет точку, фиксированную относительно репера репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$. Определим скалярное произведение “векторов” \mathbf{e}_k

$$g_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \equiv |\mathbf{e}_m| |\mathbf{e}_n| \cos(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n), \quad (2.2)$$

где числа g_{mn} определены, если мы умеем измерять длины и углы, то есть имеем соответствующие инструменты, и образуют симметричную положительно определенную матрицу. В общем случае, числа g_{mn} определяют масштабы длин и углы в теле отсчета. Если числа g_{mn} заданы, то можно определить расстояние между точками A и B по формуле

$$|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2 = g_{mn} (x_A^m - x_B^m) (x_A^n - x_B^n). \quad (2.3)$$

Числа x_A^k называются координатами точки A . Вершине репера отвечают координаты $x_A^k = 0$.

Определение 2.1: репер $\{O, e_k\}$ с присоединенным к нему множеством точек (2.1) называется телом отсчета.

Сам репер $\{O, e_k\}$ называется отсчетным, а числа x_A^k называются отсчетными координатами. Ни отсчетный репер, ни отсчетные координаты никогда не меняются, ибо именно они и порождают тело отсчета. Конечно, в теле отсчета можно вводить сколько угодно других систем координат, но об этом будет сказано позднее. Здесь важно подчеркнуть, что тензоры любого ранга лишены всякого смысла вне тела отсчета, и никакие операции между тензорами, заданными в разных телах отсчета, невозможны. Легко понять, что тело отсчета есть трехмерное евклидово пространство. Невозможно обнаружить движение тела отсчета относительно воображаемого (или истинно существующего) абсолютного пространства, но движение разных тел отсчета друг относительно друга обнаружить можно. Легко обнаружить и движение какого-либо тела относительно тела отсчета. Говоря о движении, мы подразумеваем, что вектор положения материальной точки в данном теле отсчета определяется как функция независимой переменной t , называемой временем. Для измерения времени используется прибор, называемый часами. Понятие времени — одно из наиболее трудных в науках о Природе. И.Ньютон писал [2] (с. 45): “Таким образом, повсюду, где в дальнейшем встречается слово “время” . . . под ним нужно понимать не время в его формальном значении, а только ту *отличную от времени* величину, посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время”. Принять это высказывание можно только на глубоко интуитивном уровне, но никак не на уровне логического мышления. Поэтому к концу XIX века в механике утвердилась точка зрения, зафиксированная Л.Больцманом: “Взгляд на хронометр дает нам значение той независимой переменной, которую мы назвали временем” [3] (с. 8). Конечно, неудовлетворенность подобным определением времени оставалась. Например, в прошлом существовала традиция завершать диссертации списком нерешенных проблем. В 1900 г. П.Болье среди таких проблем указал следующую: “Желательно было бы ввести время в механику более удовлетворительным образом, чем это делается теперь” [4] (с. 198). Аналогичное требование прозвучало и в знаменитом докладе Д.Гильберта на II Международном конгрессе по математике в Париже при формулировке им 6-й проблемы. Трудности, возникающие при определении времени, да и многих других понятий механики, наиболее полно были проанализированы во многих работах А.Пуанкаре (см., например, [5]). Удивительно, что эти исследования до сих пор либо вообще игнорируются, либо существенно искажаются. Если говорить о времени, то,

согласно А.Пуанкаре, главная проблема в том, что отсутствует гарантия действительного равенства двух равных по выбранным часам интервалов времени, т.е. это проблема ньютоновского равномерного течения времени. Одно из главных интуитивных представлений о свойствах времени заключается в принятии объективного характера понятий прошлого и будущего. Многие убеждены в необратимости течения времени, т.е. в том, что прошлое и будущее никогда не меняются местами. В этом и состоит принцип причинности, принимаемый явно или неявно в механике. Правда, в новейшей физике понятия прошлого и будущего уже относительны и зависят от выбора системы отсчета. Поэтому принцип причинности в новейшей физике не работает. Не вдаваясь в дискуссии по этому вопросу, отмечаем, что данная работа следует классическим традициям.

Определение 2.2: *тело отсчета, снабженное часами, называется системой отсчета.*

Можно ввести сколько угодно систем отсчета и пока что все они равноправны. Пусть некая материальная точка движется в выбранной системе отсчета, т.е. ее вектор положения \mathbf{r}_A задан как функция времени $\mathbf{r}_A(t)$. Последняя полностью определяет движение частицы относительно тела отсчета. Однако такое описание не носит объективного характера, ибо мы не в состоянии понять, что именно движется: частица, тело или и то и другое вместе. Причем степень нашего незнания произвольно велика: любая функция $\mathbf{r}_A(t)$ может трактоваться как движение любой частицы относительно какого-либо тела отсчета. Понятно, что подобное описание движения никого не интересует. Не имеют объективного характера скорость $\dot{\mathbf{r}}_A(t)$ ускорение $\ddot{\mathbf{r}}_A(t)$ частицы, поскольку, помимо неопределенности в истолковании вектора $\mathbf{r}_A(t)$, здесь добавляется неопределенность в выборе времени, ибо время, введенное выше, определено с точностью до преобразования $t \rightarrow \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — любое монотонно возрастающее отображение. Из сказанного следует, что введенные выше системы отсчета — это совсем не те понятия, на которых базируется (по существу) классическая механика. Нужны какие-то дополнительные постулаты, носящие не логический, а физический (интуитивный) характер. В качестве такого постулата в классической физике используется принцип инерции Галилея.

2.2.2 Инерциальные системы отсчета

Фундаментальным принципом классической физики, лежащим в основе буквально всех ее понятий, является принцип инерции Галилея (**GPI**).

Отказ от этого принципа разрушает все здание классической физики.

Принцип инерции Галилея: *всякая изолированная (одинокая во всем мире) материальная точка движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.*

Следует ясно понимать, что **GPI** не является ни принципом, ни аксиомой, ни постулатом в строгом смысле этих понятий, ибо использует не определенные заранее понятия: абсолютное пространство, прямолинейное и равномерное движение. Фактически **GPI** дает определение понятия прямолинейного и равномерного движения: *движение изолированной частицы в абсолютном пространстве называется прямолинейным и равномерным.* При этом не имеет значения как на самом деле движется изолированная частица в абсолютном пространстве. Важно только то, что это движение является для нас эталоном, посредством которого будут оцениваться все остальные движения. Обратим внимание на то, что в абсолютном пространстве нельзя ввести понятие прямой линии. В теле отсчета понятие прямой линии уже определено. Поэтому из всех мыслимых тел отсчета можно отобрать кандидатов на роль абсолютного пространства.

Определение 2.3: *тело отсчета называется инерциальным, если траектория любой изолированной частицы есть прямая линия в этом теле отсчета.*

Инерциальных тел отсчета бесконечно много. Они движутся друг относительно друга и различаются масштабами расстояний (матрицами g_{mn}). Важно, что при отборе инерциальных тел отсчета не используется понятие времени.

Определение 2.4: *множество инерциальных тел отсчета называется абсолютным пространством.*

Определение 2.5: *часы называются оттарированными в соответствии с GPI, если за одинаковые по этим часам интервалы времени изолированная частица пролетает одинаковые расстояния в инерциальном теле отсчета.*

Легко убедиться, что время, измеряемое по различным часам, оттарированным по Галилею, определено с точностью до линейного преобразования: $t \rightarrow kt + t_0$, где k определяет масштаб измерения времени, а t_0 — начало отсчета.

Определение 2.6: *инерциальное тело отсчета, снабженное часами, оттарированными по Галилею, называется инерциальной системой отсчета.*

Определение 2.7: *множество инерциальных систем отсчета назы-*

вается абсолютным пространством-временем классической физики.

Из сказанного выше очевидно, что в классической физике пространство и время образуют единое четырехмерное пространство, т.е. в нем пространственно-временные отношения не являются независимыми, как это утверждается в новейшей физике.

Замечание. Аксиоматическое введение времени детально обсуждается в работе С.Зарембы [7]. Более детальное изложение содержания этого и следующего пунктов можно найти в работе [11].

2.2.3 Системы отсчета и системы координат

Все точки тела отсчета идентифицированы отсчетными координатами. При желании можно изменить систему идентификации точек тела отсчета.

Определение 2.8: *система идентификации точек тела отсчета называется системой координат.*

Системой координат в каждой точке отсчета ставится во взаимно однозначное соответствие тройка чисел y^k :

$$y^k = y^k(x^1, x^2, x^3, t) \equiv y^k(y, t) \quad \Longrightarrow \quad x' = x'(y', t). \quad (2.4)$$

Здесь используется подвижная система координат. Системы координат можно заменять

$$y^{k'} = y^{k'}(y, t) \quad \Longrightarrow \quad y^m = y^m(y', t). \quad (2.5)$$

где как бы забыто о существовании формул (2.4).

Законы преобразования координат тензоров определяются именно по отношению к заменам (2.5), но ни в коем случае не по отношению к заменам систем отсчета. Поскольку выбор системы координат совершенно произволен, то выдвигается специальное требование.

Принцип объективности: *все физические величины и законы объективны и не зависят от выбора системы координат.*

Обратим внимание, что многие физические величины (скорости, кинетическая энергия и т.д.) зависят от выбора системы отсчета. Недопустимо поэтому смешение понятий систем отсчета и систем координат. Замены систем отсчета подробно обсуждаются в работе [11], где также вводятся инвариантные дифференциальные операторы.

2.2.4 Трансляционные и спинорные движения

Существуют два принципиально различных вида движения: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и

описывают перемещения (трансляции) тел в системе отсчета. Спинорные движения определяются заданием функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три. Сопутствующие спинорным движениям характеристики (векторы поворота, угловые скорости и т.д.) описываются с помощью понятия аксиального вектора, прообразом которого являются объекты, называемые ниже спин-векторами. Именно спин-векторы являются прямыми носителями физического содержания того или иного спинорного понятия. Чтобы определить спин-вектор необходимо в теле отсчета задать прямую, называемую осью спин-вектора, и в плоскости, ортогональной оси, задать круговую стрелку, охватывающую ось. Длина этой круговой стрелки называется модулем спин-вектора, а направление стрелки показывает направление поворота или вращения. Спин-векторы очень удобны для работы на интуитивном уровне, но на формальном уровне удобнее работать не с ними, а с так называемыми аксиальными векторами, сопоставляемыми по определенному правилу спин-векторам. Принятие этого правила называется ориентацией системы отсчета. Каждому спин-вектору \mathbf{a}_* сопоставляется “обычный” вектор \mathbf{a} :

- 1) \mathbf{a} расположен на оси спин-вектора \mathbf{a}_* ,
- 2) модуль \mathbf{a} равен модулю \mathbf{a}_* ,
- 3) \mathbf{a} направлен так, чтобы при взгляде с его конца круговая стрелка спин-вектора показывала движение либо против хода часовой стрелки (правоориентированная система отсчета), либо по ходу часовой стрелки (левоориентированная система отсчета).

Векторы, сопоставляемые по указанному правилу спин-векторам, называются аксиальными. Видим, что аксиальные векторы не зависят от выбора системы координат и не меняются при замене правой системы координат на левую и наоборот. Таким образом в ориентированной системе отсчета действуют два типа вектора (направленных отрезков): одни из них не реагируют на изменение ориентации системы отсчета и называются полярными, а другие при изменении ориентации умножаются на (-1) и называются аксиальными. Спинорные движения определяются заданием собственно ортогонального тензора $\mathbf{P}(t)$:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P}(t) = +1. \quad (2.6)$$

Тензор $\mathbf{P}(t)$ ниже будет называться тензором поворота [12]. Согласно теореме Эйлера любой тензор поворота, отличный от \mathbf{E} , однозначно представим в виде

$$\mathbf{P}(t) = (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad (2.7)$$

где единичный вектор $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t)$, является неподвижным вектором тензора $\mathbf{P}(t)$, т.е. $\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{m}(t) = \mathbf{m}(t)$, а угол $\theta = \theta(t)$ называется углом поворота.

Вектор $\Theta = \theta(t)\mathbf{m}(t)$ называется вектором поворота. Справедливо представление

$$\mathbf{P}(t) = \exp[\Theta \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{R} = \Theta \times \mathbf{E}, \quad (2.8)$$

где тензор $\mathbf{R} = -\mathbf{R}^T$ называется логарифмическим тензором поворота.

Представление (2.8) часто оказывается необходимым при исследовании, например, устойчивости.

Изменение тензора поворота во времени характеризуется тензором $\dot{\mathbf{P}}$, но удобнее работать не с $\dot{\mathbf{P}}$, а с тензорами спина: $\mathbf{S} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T$ — левый тензор спина и $\mathbf{S}_r = \mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{P}}$ — правый тензор спина. Оба тензора спина косимметричны и имеют сопутствующие векторы: $\mathbf{S} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}$, $\mathbf{S}_r = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E}$. Аксиальные векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ называются левой (истинной) и правой угловыми скоростями соответственно. Удобно пользоваться левым и правым уравнениями Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.9)$$

В динамике твердого тела вектор $\boldsymbol{\omega}$ принято называть угловой скоростью в пространстве, а вектор $\boldsymbol{\Omega}$ — угловой скоростью в теле.

Подробнее с тензором поворота и его представлениями можно ознакомиться по работам [8,9].

2.3 Тела и их динамические структуры

2.3.1 Тела-точки и их размерность

В ньютоновой механике исходным объектом является материальная точка, которая наделяется единственным свойством — массой. Уже одно это обстоятельство не позволяет включить, например, электродинамику в рациональную (ньютонову) механику, так как материальную точку нельзя наделить зарядом. В эйлеровой механике ситуация резко меняется. В качестве исходного объекта в ней вводится тело-точка, которое реагирует не только на трансляционные, но и на спинорные движения. Относительно тела-точки считается, что оно существует и занимает нулевой объем в теле отсчета. Движение тела-точки определено, если заданы его вектор положения $\mathbf{R}(t)$ и тензор поворота $\mathbf{P}(t)$. Трансляционная и угловая скорости тела-точки находятся по формулам

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad \boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T \right)_{\times} \quad ((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\times} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (2.10)$$

Аксиома Г1: кинетическая энергия тела-точки есть квадратичная форма его скоростей:

$$K = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right), \quad (2.11)$$

где тензоры второго ранга $m\mathbf{A}$, $m\mathbf{B}$, $m\mathbf{C}$ называются тензорами инерции тела-точки, скалярный множитель m выделен просто для удобства. Тензоры инерции не зависят от скоростей, но зависят от тензора поворота. Представление (2.11) значительно сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Например, кажется, что его можно упростить следующим рассуждением. Рассмотрим чисто трансляционное движение тела-точки. Тогда (2.11) принимает вид $2K = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{v}$. Положим здесь $\mathbf{v} = v\mathbf{n}$ и получим $2K = mv^2\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{n}$. Примем теперь во внимание, что система отсчета изотропна, т.е. телу-точке безразлично, в каком направлении ему двигаться. Так будет только тогда, когда выполняется равенство $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{n} = m \cdot \mathbf{A}_* \cdot m, \forall m, \mathbf{n}$. Это равенство, в свою очередь, выполняется только для шарового тензора $\mathbf{A}_0 = \alpha\mathbf{E}$, где множитель α можно положить равным единице, так как у нас уже выделен скалярный множитель m . К сожалению, это рассуждение неправильно, и равенство $\mathbf{A}_0 = \alpha\mathbf{E}$ можно постулировать, но нельзя доказать. Примем теперь во внимание, что тензоры инерции должны удовлетворять очевидным равенствам

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0) \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad (2.12)$$

где $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$ — значения тензоров инерции в отсчетном положении, т.е. при тех значениях t_0 , при которых $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{E}$.

Формулы (2.12) следует понимать как три формулы для каждого из тензоров в отдельности. С учетом вышеприведенных рассуждений и (2.12) получаем, что тензор инерции \mathbf{A} равен единичному, а представление (2.11) принимает вид

$$K = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right), \quad (2.13)$$

где скалярный множитель m называется массой тела-точки.

Представление (2.13) обладает большой степенью общности. Но нельзя утверждать, что оно является максимально общим. Допустим, например, что тело-точка моделирует электрон. Тогда все наше рассуждение теряет силу, ибо электрон невозможно заставить совершать чисто трансляционные движения, у него $\boldsymbol{\omega}$ всегда, видимо, отлична от нуля. Правда, здесь никто в настоящее время не может сказать ничего определенного.

Необходимы дополнительные исследования. Вероятно, для тяжелых частиц представление (2.13) является приемлемым, но для легких частиц, например, для нейтрино, видимо, необходимо пользоваться полным выражением (2.11), где множитель m лучше уже не выделять. При использовании (2.11) массой тела-точки удобнее называть величину $1/3 \operatorname{tr}(m\mathbf{A})$. К сожалению, здесь не время и не место обсуждать многочисленные нюансы, заключенные в представлении (2.11). В принципе, на выражение для кинетической энергии налагаются очень слабые требования: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ и (2.12). Все остальные требования уже не очевидны и должны приниматься с оговорками. Например, казалось бы естественным потребовать от (2.11) положительной определенности. Однако, возможно, что можно требовать выполнения только более слабого неравенства

$$\frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} K dt \geq 0, \quad \forall \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} : |\mathbf{v}| \neq 0, |\boldsymbol{\omega}| \neq 0, \quad (2.14)$$

где Δ — малый интервал времени порядка периода обращения электрона по орбите вокруг ядра.

Для целей данной работы нет необходимости в дальнейших обсуждениях (2.11), ибо нас интересуют только основные структуры.

Определение 2.9: *число независимых параметров, определяющих кинетическую энергию тела-точки и не зависящий от движения тела-точки, называется размерностью тела-точки.*

Размерность материальной точки равна единице $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{0}$, причем единственным параметром является масса. Размерность абсолютно твердого тела равна четырем: $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, \mathbf{C} — центральный тензор инерции; параметрами являются масса и три главных центральных момента инерции. Размерность частиц, необходимых для построения электродинамики, заведомо больше четырех. В общем случае, размерность частицы (2.11) равна 12, а тела-точки (2.13) — 10.

Определение 2.10: *количеством движения \mathbf{K}_1 тела-точки называется линейная форма скоростей*

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} = m (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}). \quad (2.15)$$

Определение 2.11: *кинетическим моментом \mathbf{K}_2^Q тела-точки, вычисленным относительно опорной точки Q , зафиксированной в данном теле отсчета, называется линейная форма скоростей, вычисляемая*

по формуле

$$\mathbf{K}_2^Q = (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} = m [(\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}]. \quad (2.16)$$

Здесь первое слагаемое называется моментом количества движения тела-точки, а второе слагаемое, т.е. величина $m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega})$, называется собственным кинетическим моментом или, короче, динамическим спином тела-точки.

В заключение этого пункта приведем пример воображаемого тела-точки, кинетическая энергия которого задается выражением

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + q\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}J\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2.17)$$

где m — масса тела-точки, J — момент инерции, q есть новый параметр, который не встречается в телах-точках, используемых в классической механике. Иными словами, параметр q определяет некое новое свойство частицы, которое условно будем называть зарядом. Этим примером мы хотим подчеркнуть, что новые свойства частиц нельзя вводить голословно, но они должны описываться теми или иными параметрами в динамических структурах, которые определяют тело-точку. Например, если мы хотим ввести такие свойства частицы, как “шарм”, “очарование”, “заряд” и т.д., то это должно быть отмечено в динамических структурах частицы. Кинетическая энергия, по определению, является положительно определенной функцией своих аргументов. Положительная определенность формы (2.17) обеспечивается условиями

$$m > 0, \quad mJ - q^2 > 0.$$

Количество движения и кинетический момент тела-точки (2.17) определяются выражениями

$$\mathbf{K}_1 = m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R} \times (m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega}) + q\mathbf{V} + J\boldsymbol{\omega}. \quad (2.18)$$

Как видим, и эти структуры не встречаются в классической механике. Забегав немного вперед, рассмотрим движение этой частицы по инерции в пустоте. При этом количество движения и кинетический момент частицы должны сохранять постоянные значения

$$m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega} = m\mathbf{V}_0 + q\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{a} = a\mathbf{e}, \quad \mathbf{R} \times \mathbf{a} + q\mathbf{V} + J\boldsymbol{\omega} = q\mathbf{V}_0 + J\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{b}. \quad (2.19)$$

Здесь принято, что $\mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$. Удобнее рассматривать последнее уравнение, продифференцировав его по времени и исключив из него трансляционную скорость. В результате получим уравнение

$$\left(J - \frac{q^2}{m}\right) \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} + \frac{qa}{m} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} = a\mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}| = 1. \quad (2.20)$$

Решение этого уравнения ищем в виде прецессирующего вектора

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{Q}(\varphi(t) \mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \varphi(0) = 0. \quad (2.21)$$

Подставляя это выражение в (2.20) и используя уравнение Пуассона, получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{qa}{q^2 - mJ} \equiv \alpha \quad \Rightarrow \quad \varphi = \alpha t. \quad (2.22)$$

Интегрируя уравнения (2.19), нетрудно найти все искомые характеристики движения:

$$m \mathbf{R}(t) = (a - q\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e})t \mathbf{e} + qa^{-1} \mathbf{e} \times \mathbf{Q}(\alpha t \mathbf{e}) \cdot [\boldsymbol{\omega}_0 - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}]. \quad (2.23)$$

Вектор $\mathbf{R}(t)$ показывает, что частица движется по спирали. Если начальные условия подобрать так, чтобы выполнялось равенство

$$a = q\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e},$$

то движение частицы по инерции будет происходить по окружности, как это утверждали древние и, в частности, Пифагор. Для вектора скорости имеем выражение

$$m \mathbf{V}(t) = \mathbf{Q}(\alpha t \mathbf{e}) \cdot (a \mathbf{e} - q \boldsymbol{\omega}_0). \quad (2.24)$$

Видим, что трансляционная и угловая скорости частицы постоянны по модулю, но переменны по направлению, т.е. движение частицы по инерции остается равномерным. В этом примере следует обратить внимание, что в инерциальной системе отсчета движение изолированной частицы (телачки) по инерции не обязательно является прямолинейным. Разумеется, речь идет не о классической частице. Но ведь никто не доказал, что, например, электрон является классической частицей (материальной точкой). Этот пример показывает, что в классической механике таятся огромные, еще не изученные, возможности. Здесь возможны ситуации, которые с первого взгляда могут показаться неправдоподобными. Тем не менее, они не более неправдоподобны, чем те “чудеса”, которые происходят в микромире. Заметим, кстати, что чем глубже мы погружаемся в микромир, тем

важнее становится роль спинорных движений. Последние в рассмотренном примере представлены не тензором поворота \mathbf{Q} , а вектором угловой скорости.

Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент исчерпывают список динамических структур тела-точки.

2.3.2 Тела и их динамические структуры

В механике любое тело рассматривается как совокупность неких первичных тел-точек. Например, в ньютоновской механике всякое тело рассматривается как совокупность материальных точек. Нет оснований отказываться от этой традиции. Однако здесь имеются проблемы, которые до сих пор не получили ясного разрешения. Все было бы очень просто, если бы была возможность ограничиться первичными телами-точками только одного типа, как это и делается в ньютоновской механике. На самом деле ситуация сложнее. Во-первых, современное состояние науки позволяет утверждать, что от действительно первичных тел-точек, если они вообще существуют, мы еще очень далеки. Во-вторых, первичные тела-точки, из которых современная механика составляет тела, существенно различны. В-третьих, и это главная проблема, первичные тела-точки в процессе взаимодействий могут не только менять свою структуру, но может меняться и их число. Например, $2n$ атомов водорода (первичные тела одного типа) при взаимодействии с n атомами кислорода (первичные тела-точки другого типа) образуют в результате n молекул воды (первичные тела-точки третьего типа). Таким образом, вместо $3n$ первичных тел-точек мы получили n первичных тел-точек. О том почему молекулу воды нельзя считать просто состоящей из трех тел-точек будет немного сказано при обсуждении понятия внутренней энергии. Могут возразить, что рассмотрение подобных трансформаций частиц выходит за рамки рациональной механики и составляет предмет химии. Так это и было до недавнего времени. Однако современные технологии таковы, что многие сложные физические, химические и механические явления уже нельзя изучать отдельно. Поэтому для их совместного рассмотрения необходимы такие формулировки фундаментальных законов, которые допускают существование сложных явлений, подобных указанным выше. Тем не менее, в данной работе мы будем придерживаться точки зрения, близкой к традиционной. Будем считать, что Вселенная рациональной механики есть множество тел-точек, структура которых определена выше. Выберем в системе отсчета простую замкнутую поверхность Ляпунова \mathbb{S}_t , которая может деформироваться и

перемещаться относительно тела отсчета. Считается, что на \mathbb{S}_t нет никаких тел-точек, хотя можно и отказаться от этого условия.

Определение 2.12: множество \mathfrak{M}_A тел-точек, находящихся внутри \mathbb{S}_t , называется телом A , а множество \mathfrak{M}_A^e тел-точек, находящихся вне \mathbb{S}_t , называется окружением тела A и обозначается A^e .

Объемом тела A называется объем, заключенный внутри \mathbb{S}_t , поэтому объем тела A не является физической (объективной) характеристикой тела A .

Определение 2.13: тело A называется закрытым, если оно не обменивается телами-точками со своим окружением: в противном случае тело A называется открытым.

Аксиома T2: кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент тела A аддитивны по телам-точкам, составляющим тело A .

Пусть все характеристики i -го тела-точки снабжаются индексом i . Тогда в соответствии с аксиомой **T2** имеем

$$\begin{aligned} K(A) &= \sum_{i \in \mathfrak{M}_A} m_i \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i \right) = \\ &= \sum_i m_i K_i, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где K_i называется массовой плотностью кинетической энергии. Количество движения определяется выражением

$$\mathbf{K}_1(A) = \sum_i m_i \mathbf{K}_{1i}, \quad \mathbf{K}_{1i} = \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{v}_i} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \quad (2.26)$$

Для кинетического момента имеем аналогичное выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^Q(A) &= \sum_i m_i \mathbf{K}_{2i}^Q, \quad \mathbf{K}_{2i}^Q = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ}) \times \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{v}_i} + \frac{\partial K_i}{\partial \boldsymbol{\omega}_i} = \\ &= (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ}) \times (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}_i + \mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \end{aligned} \quad (2.27)$$

В качестве простейшего примера вычислим динамические структуры абсолютно твердого тела, рассматриваемого в теоретической механике.

Определение 2.14: совокупность тел-точек называется абсолютно твердым телом A , если выполняются следующие два условия. Первое: для любых пар точек A_i и A_m , принадлежащих телу A и для любых моментов времени t_1 и t_2 справедливы равенства

$$|\mathbf{R}_i(t_1) - \mathbf{R}_m(t_1)| = |\mathbf{R}_i(t_2) - \mathbf{R}_m(t_2)|. \quad (2.28)$$

Второе: тензоры поворота всех тел-точек одинаковы

$$\mathbf{P}_i(t) = \mathbf{P}_m(t) = \mathbf{P}(t), \quad (2.29)$$

причем $\mathbf{P}(t)$ называется тензором поворота тела \mathcal{A} .

Из (2.28) и требования непрерывности движения вытекает основная теорема кинематики абсолютно твердого тела

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{R}_X(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_X), \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i(0), \quad \mathbf{r}_X = \mathbf{R}_X(0), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad (2.30)$$

где $\mathbf{R}_X(t)$ — вектор положения произвольно выбираемой точки X , называемой полюсом, зафиксированным в теле \mathcal{A} . Принимая для тел-точек модель материальной точки

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad \left(\implies \quad K_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{R}}_i(t) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i(t) \right),$$

получаем кинетическую энергию, количество движения и кинетический момент тела \mathcal{A} в виде

$$K(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \dot{\mathbf{R}}_X + \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \mathbf{B}_X \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C}_X \cdot \boldsymbol{\omega},$$

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = m \dot{\mathbf{R}}_X + \mathbf{B}_X \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) + \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \mathbf{B}_X + \mathbf{C}_X \cdot \boldsymbol{\omega},$$

где $\dot{\mathbf{R}}_X$ — скорость полюса, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, отвечающая повороту $\mathbf{P}(t)$, \mathbf{B}_X и \mathbf{C}_X — тензоры инерции тела \mathcal{A} , определяемые по формулам

$$\mathbf{B}_X = m (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C) \times \mathbf{E} = \mathbf{P}(t) \cdot [m (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{P}^T(t),$$

$$\mathbf{C}_X = \mathbf{P}(t) \cdot \left\{ \sum_i m_i \left[(\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \otimes (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \right] \right\} \cdot \mathbf{P}^T(t). \quad (2.32)$$

В (2.31) – (2.32) через m обозначена масса тела \mathcal{A} , через $\mathbf{R}_X(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_X$, $\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_C$ — векторы положения полюса и центра масс тела \mathcal{A}

$$m = \sum_i m_i, \quad \mathbf{R}_C(t) = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{R}_i(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \left(\frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right).$$

Для сплошных сред все суммы заменяются соответствующими интегралами. Если полюс X выбирается в центре масс тела \mathcal{A} , то $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, а тензор \mathbf{C} называется центральным тензором инерции. В последние 30 – 40 лет сложилось мнение, что механику сплошных сред нельзя построить на

основе “молекулярных” представлений. Это мнение обосновывается различными аргументами. В частности, К.Трусделл и Р.Тупин [14] считают это невозможным, поскольку на микроуровне действуют законы квантовой, а не классической механики. Может быть, это и в самом деле так. Но автор полагает, что возможности классической механики далеко не исчерпаны. Если для тел-точек рассматривать форму общего вида (2.11), то поведение этих тел-точек совсем не похоже на то, к которому мы привыкли. Не исключено, что использование тел-точек общего вида восстановит дееспособность классической механики и на микроуровне. Что касается перехода к сплошной среде, то здесь необходимо использовать так называемый нестандартный анализ, т.е. вернуться к языку, которым пользовался Л.Эйлер.

2.4 Воздействия

2.4.1 Силы и моменты

Центральной идеей в механике является представление о том, что в инерциальных системах отсчета закрытые тела меняют характер своего движения только в результате влияния других тел. Особенно отчетливо эта идея представлена у Л.Эйлера [15]. Для реализации этой идеи в механике вводятся специальные структуры, называемые воздействиями, и являющиеся первичными понятиями. Иногда думают, что первичные понятия не требуют определения. Это заблуждение. На самом деле первичные понятия вводятся определением их свойств. Введение воздействия опирается на аксиому, которая является неким дополнением к принципу инерции Галилея, продолжая его на тела общего вида.

Основная аксиома механики: *в инерциальной системе отсчета изолированное закрытое тело A движется так, что его количество движения и кинетический момент сохраняются неизменными.*

Обычно эту аксиому предпочитают доказывать как теорему, но при этом введение воздействий становится расплывчатым и ведет к неясностям в трактовке сил и моментов.

Аксиома F1: *в инерциальной системе отсчета причина изменения количества движения закрытого тела A обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством полярного вектора и называется силой $\mathbf{F}(A, A^e)$, действующей на тело A со стороны его окружения A^e .*

Аксиома F2: в инерциальной системе отсчета причина изменения кинетического момента закрытого тела \mathcal{A} , вычисленного относительно опорной точки Q , обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством аксиального вектора и называется моментом $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующим на тело \mathcal{A} со стороны его окружения \mathcal{A}^e .

При этом момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, действующий со стороны тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} , вычисляется по правилу

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \quad (2.33)$$

где \mathbf{R}_Q определяет положение опорной точки Q ; вектор \mathbf{R}_P — определяет произвольно выбираемую точку \mathcal{B} , называемую точкой приведения; вектор $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется собственно моментом — он зависит от выбора точки приведения P , но не зависит от выбора опорной точки Q . Полный момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ по определению не зависит от выбора точки приведения. Силы и моменты сложны для восприятия начинающим. Трудность в том, что силы и моменты выражают совершенно конкретные физические идеи, являющиеся первичными понятиями и не поддающиеся математической формализации, но вполне доступные нам на интуитивном уровне. Ключом к пониманию сил и моментов являются следующие утверждения:

а) сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это реакция тела \mathcal{B} на изменение положения тела \mathcal{A} ;

б) момент $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это реакция тела \mathcal{B} на повороты тела \mathcal{A} вокруг точки приведения P .

Для того, чтобы интуитивно ощутить наличие силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ необходимо проделать следующую мысленную процедуру: 1) удалить из Вселенной все тела за исключением тел \mathcal{A} и \mathcal{B} , 2) мысленно “заморозить” тело \mathcal{A} и превратить его в абсолютно твердое, 3) мысленно придавать всем точкам \mathcal{A} всевозможные бесконечно малые смещения $\xi \mathbf{e}$, где \mathbf{e} , произвольный единичный вектор. Если тело \mathcal{B} как-то препятствует описанным смещениям тела \mathcal{A} , то сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ отлична от нуля. Если существует такое направление \mathbf{e}_* , что тело \mathcal{B} не препятствует смещению тела \mathcal{A} в этом направлении, то проекция $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на \mathbf{e}_* равна нулю. Для того, чтобы ощутить наличие собственно момента $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, необходимо: 1) и 2) как для силы; 3) закрепить точки приведения в теле отсчета и относительно тела \mathcal{A} , т.е. тело \mathcal{A} и точка P должны составлять абсолютно твердое тело с неподвижной точкой P ; 4) мысленно поворачивать тело \mathcal{A} вокруг P на всевозможные бесконечно малые векторы поворота $\varphi \mathbf{e}$, где $|\mathbf{e}| = 1$. Если тело \mathcal{B} как-то препятствует описанным поворотам тела \mathcal{A} , то $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ от-

личен от нулевого вектора. Если существует такая ось, проходящая через P и натянутая на \mathbf{e}_{**} , что тело B не препятствует повороту тела A вокруг этой оси, то проекция $\mathbf{L}^P(A, B)$ на \mathbf{e}_{**} равна нулю. Из аксиомы F2 следует, что при изменении точки приведения собственно момент меняется так, чтобы полный момент $\mathbf{M}^Q(A, B)$ остался неизменным. Пусть P и S две разные точки приведения. Тогда имеем

$$\mathbf{L}^S(A, B) = (\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_P) \times \mathbf{F}(A, B) + \mathbf{L}^P(A, B). \quad (2.34)$$

Определение 2.15: пара векторов $\{\mathbf{F}(A, B); \mathbf{M}^Q(A, B)\}$ называется воздействием тела B на тело A .

Определение 2.16: воздействие тела B на тело A называется чисто силовым (или просто силовым), если существует такая точка приведения $\mathbf{R}_P(t)$, что при любых движениях тела A воздействие тела B на тело A определяется заданием пары векторов

$$\{\mathbf{F}(A, B); (\mathbf{R}_P(t) - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(A, B)\}, \quad (\mathbf{L}^P(A, B) = \mathbf{0}), \quad (2.35)$$

причем такая точка P называется центром силового воздействия.

Во многих книгах по механике центр силового воздействия называют точкой приложения силы $\mathbf{F}(A, B)$. Строго говоря, это неправильно, ибо векторы $\mathbf{F}(A, B)$, $\mathbf{M}^Q(A, B)$, $\mathbf{L}^P(A, B)$ — суть свободные векторы и ни к каким точкам тела не прилагаются, а центр силового воздействия может находиться вне тела A . Отмеченная неточность не так безобидна, как кажется на первый взгляд: говоря о точках приложения, мы внушаем ученику принципиально неверное на интуитивном уровне представление о силе, что помешает ему, если он захочет изучать нетривиальные случаи. Сказанное дает интуитивно ясное представление о природе понятий сил и моментов. К сожалению, этого нельзя просто выучить, только настойчивая практика применения этих понятий ведет к успеху.

Определение 2.17: воздействие тела B на тело A называется чисто моментным, если $\mathbf{F}(A, B) = \mathbf{0}$.

Для первичных понятий невозможно дать определения. В таких случаях даются не определения самих понятий, а перечисляются свойства, органически присущие этим понятиям. Важнейшим свойством сил и моментов, подтвержденным всем ходом развития механики, является их аддитивность как по телам, составляющим тело B , так и по телам, составляющим тело A .

Аксиома F3: сила $\mathbf{F}(A, B)$ и момент $\mathbf{M}^Q(A, B)$ аддитивны по отдельным телам C и D , составляющим тело B : $B = C \vee D$

$$\mathbf{F}(A, C \vee D) = \mathbf{F}(A, C) + \mathbf{F}(A, D), \quad C \wedge D = \emptyset; \quad (2.36)$$

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C} \vee \mathcal{D}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{D}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset. \quad (2.37)$$

Вычисление момента $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ подразумевает выбор опорной точки и точки приведения. Опорная точка должна быть одна и та же в обеих частях (2.37). Выбор точки приведения осуществляется произвольно и для каждого из моментов $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C} \vee \mathcal{D})$, $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ может производиться независимо.

Аксиома F4: сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ аддитивны по отдельным телам \mathcal{C} и \mathcal{D} , составляющим тело \mathcal{A} : $\mathcal{A} = \mathcal{C} \vee \mathcal{D}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}, \mathcal{B}) = \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{D}, \mathcal{B}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset; \quad (2.38)$$

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}, \mathcal{B}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{D}, \mathcal{B}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset. \quad (2.39)$$

Приведенными выше аксиомами исчерпываются все постулаты, относящиеся к воздействиям в общем случае. Введенные аксиомы не определяют конкретного вида сил и моментов, они только фиксируют их основные свойства.

Примечания.

1. В литературе часто встречается термин “сила инерции”. Последняя, согласно сказанному выше, может называться силой только весьма условно, ибо “силы” инерции не удовлетворяют главному требованию — они не порождены другими телами, да и вообще не существуют в инерциальной системе отсчета.

2. Аксиомы аддитивности в книгах по механике часто подменяются так называемым “принципом независимости сил”. Следует иметь в виду, что аддитивность воздействий всеобща, а независимость воздействий, как правило, не имеет места.

2.4.2 Статика абсолютно твердого тела

В качестве простой иллюстрации применения понятий сил и моментов сформулируем необходимые условия равновесия абсолютно твердого тела.

Утверждение: если абсолютно твердое тело \mathcal{A} находится в покое (в равновесии), то внешние сила и момент, действующие на него, равны нулю, т.е.

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \quad (2.40)$$

При выполнении этих условий абсолютно твердое тело может совершать движение, сохраняющее его количество движения и кинетический момент.

Чтобы исключить эти движения, необходимо принять дополнительное требование об отсутствии движения тела в какой-либо момент времени. При практическом использовании условий равновесия целесообразно применять аксиомы аддитивности.

Пример: дано абсолютно твердое тело A , к точкам B и C которого прикреплены тонкие нити, передающие силы \mathbf{F}_B и \mathbf{F}_C ; выяснить, при каких ограничениях на силы \mathbf{F}_B и \mathbf{F}_C тело A находится в равновесии.

Воздействия передаются на тело только посредством нитей, которые примем за тела окружения и обозначим теми же буквами, что и точки их прикрепления к телу A . Таким образом, имеем $A^e = B \vee C$. Первый закон статики требует, чтобы сила $\mathbf{F}(A, A^e)$ обращалась в нуль. Поэтому имеем равенство

$$\mathbf{F}(A, A^e) = \mathbf{F}(A, B \vee C) = \mathbf{F}(A, B) + \mathbf{F}(A, C) \equiv \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \mathbf{0}. \quad (2.41)$$

При вычислении момента используем аксиому аддитивности

$$\mathbf{M}^Q(A, A^e) = \mathbf{M}^Q(A, B \vee C) = \mathbf{M}^Q(A, B) + \mathbf{M}^Q(A, C), \quad (2.42)$$

где Q — выбранная опорная точка.

Для простоты совместим ее с началом в системе отсчета. В таком случае будем опускать символ опорной точки в обозначениях. При вычислении момента $\mathbf{M}^Q(A, B)$ необходимо сначала выбрать точку приведения. Выбирать ее можно произвольно. Если в качестве точки приведения выбрать какую-либо точку P , не совпадающую с точкой закрепления нити B , то собственный момент $\mathbf{L}^P(A, B)$ будет отличен от нуля. Действительно, если мы будем поворачивать тело A вокруг точки P , то нить B будет препятствовать этому повороту. Это и означает, что $\mathbf{L}^P(A, B)$ отличен от нуля. Если же в качестве точки приведения выбрать точку B , то собственно момент $\mathbf{L}^B(A, B)$ будет равен нулю, поскольку нить не сопротивляется изгибу. Аналогичные рассуждения нужно провести и для момента $\mathbf{M}^Q(A, C)$. Окончательно получаем равенство

$$\mathbf{M}^O(A, A^e) = \mathbf{M}^O(A, B) + \mathbf{M}^O(A, C) = \mathbf{R}_B \times \mathbf{F}_B + \mathbf{R}_C \times \mathbf{F}_C = \mathbf{0}. \quad (2.43)$$

Внешне выражение (2.43) не совпадает с (2.33), но оно легко преобразуется к виду (2.33). При этом легко убедиться, что не существует такой точки приведения, чтобы собственно момент $\mathbf{L}^P(A, A^e)$ равнялся нулю. Это означает, что в рассматриваемом примере внешнее воздействие окружения A^e на тело A не является чисто силовым, хотя воздействия от каждой из нитей являются чисто силовыми. Решая систему (2.41) – (2.43), получаем

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_C, \quad \mathbf{F}_B = \lambda(\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_B), \quad (2.44)$$

где величина λ остается произвольной. Если величина λ положительна, то положение равновесия устойчиво. Если величина λ отрицательна, то положение равновесия неустойчиво, что, разумеется, нужно доказывать отдельно.

2.5 Полная и внутренняя энергии

Энергия — одна из важнейших и наименее разработанных структур в рациональной механике. Даже понятие кинетической энергии, впервые введенное в неотчетливой форме Г.В.Лейбницем, далеко не сразу утвердилось в механике. Позднее понятие энергии было расширено включением в нее потенциалов внутренних и внешних сил. Однако это расширение носило формальный характер, а уравнение баланса энергии являлось следствием законов Ньютона, т.е. не было самостоятельной структурой. В механике сплошных сред дело обстояло иначе. В 1839г. Дж.Грин впервые ввел понятие внутренней энергии, которое прочно утвердилось в механике сплошных сред, а уравнение баланса энергии стало независимым от законов движения постулатом. Наиболее полному анализу понятие энергии подверглось в работах Г.Гельмгольца [16] и А.Пуанкаре [5]. Однако итог этого анализа не вполне удовлетворителен из-за отсутствия ясной физической идеи. Нет ясного понимания концепции энергии и в настоящее время, хотя уже многие факты указывают на центральную роль энергии (не сводящейся к кинетической энергии) при исследовании многих проблем, особенно на микроуровне. Цель данного пункта не в прояснении концепции энергии, а в подчеркивании роли энергии, как самостоятельной структуры механики.

Кинетическая энергия тела \mathcal{A} есть скалярная мера движения тела относительно выбранного тела отсчета. Сама по себе она не носит объективного характера и в этом смысле мало что определяет. Ясно, что кинетическая энергия далеко не полностью характеризует энергетическое состояние тела. Уже само существование тел в виде не распадающихся объектов указывает на присущее им “нечто”, что может выделяться или поглощаться при распаде тел или их деформации. Это “нечто” можно назвать внутренней энергией, а полную энергию E тела \mathcal{A} представить в виде суммы

$$E(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) + U(\mathcal{A}). \quad (2.45)$$

Функция $K(\mathcal{A})$ полностью определена. Внутренняя энергия $U(\mathcal{A})$ есть новая характеристика тела \mathcal{A} и требует определения. Если внутренняя

энергия определена, то и полная энергия тела определена. Часто различие между кинетической и внутренней энергиями тела \mathcal{A} сводят к простому утверждению, что кинетическая энергия есть часть полной энергии, зависящая от скоростей тел-точек, составляющих тело \mathcal{A} , а внутренняя энергия есть часть полной энергии, зависящая от положений тел-точек, составляющих тело \mathcal{A} . Во многих случаях подобное разделение оказывается приемлемым и не ведет ни к каким неприятностям. Однако принятие этой точки зрения резко сужает область применимости механики и потому совершенно неприемлемо в фундаментальном плане. Качественное различие понятий кинетической и внутренней энергии состоит в следующем. Кинетическая энергия — это та часть полной энергии, которая зависит от выбора системы отсчета и потому не является физической (объективной) характеристикой тела. Внутренняя энергия — это та часть полной энергии тела, которая не зависит от выбора системы отсчета и связана с самим телом. Образно говоря, внутренняя энергия как бы заморожена в тело и перемещается вместе с ним. Важно подчеркнуть, что здесь речь идет о любых системах отсчета, т.е. инерциальность системы отсчета не подразумевается. Внутренняя энергия характеризует способность тела запасать энергию внутри самого себя. Например, внутренняя энергия материальной точки постоянна и не меняется при ее движениях. То же самое можно сказать об абсолютно твердом теле. Внутренняя энергия тела, состоящего из двух материальных точек, соединенных безынерционной пружиной, с точностью до постоянной величины равна энергии деформации пружины. Это простые примеры. Чтобы прояснить (или запутать) более сложную ситуацию, рассмотрим следующий идеализированный пример. Допустим, тело \mathcal{A} состоит из $2n$ атомов водорода и n атомов кислорода, причем атомы рассматриваются как материальные точки (в этом и состоит идеализация). Между атомами действуют некие силы, которые потенциальны. Полная энергия этого тела есть сумма кинетических энергий всех атомов и потенциала внутренних сил. Иными словами, внутренняя энергия этого тела равна потенциалу внутренних сил. С другой стороны, известно что два атома водорода объединяются с одним атомом кислорода и образуют молекулу воды, которую, в свою очередь, можно рассматривать как материальную точку (еще одна идеализация). Поэтому тело \mathcal{A} можно рассматривать как состоящее из n тел-точек (молекул воды), между которыми действуют потенциальные силы. В этом случае полная энергия тела \mathcal{A} есть сумма кинетических энергий молекул и потенциала внутренних сил. Понятно, что полные энергии тела \mathcal{A} в обоих случаях должны совпадать, хотя и кинетические энергии, и внутренние энергии тела \mathcal{A} в этих

двух подходах будут различаться самым существенным образом. В этом примере мы видим, что разделение полной энергии на кинетическую и внутреннюю не носит абсолютного характера. Отсюда и многочисленные проблемы, связанные с принятием формальных определений для энергии.

Не вдаваясь в дальнейшие обсуждения, сформулируем несколько аксиом относительно энергии, которые показывают направление существующих исследований.

Аксиома Е1: внутренняя энергия тела \mathcal{A} зависит только от конфигурации тела \mathcal{A} , т.е. только от векторов положения \mathbf{R}_i и тензоров поворота \mathbf{P}_i тел-точек \mathcal{A}_i , составляющих тело \mathcal{A} ,

$$U(\mathcal{A}) = U(\mathbf{R}_1, \mathbf{P}_1; \mathbf{R}_2, \mathbf{P}_2; \dots; \mathbf{R}_N, \mathbf{P}_N). \quad (2.46)$$

Аксиома Е2: внутренняя энергия тела \mathcal{A} аддитивна по парам тел-точек, составляющих тело \mathcal{A} ,

$$U(\mathcal{A}) = U\left(\bigvee_{i=1}^N \mathcal{A}_i\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N \varphi_{i,k}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k), \quad \varphi_{i,i}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i) = 0. \quad (2.47)$$

Аксиома Е2 часто ставится под сомнение, например, для ионных взаимодействий. Однако на самом деле в физике никогда не анализировались потенциалы вида (2.46). Не доказано, но по всей видимости аксиома (2.47) необходима для согласования с аксиомами аддитивности воздействий. Следует обратить внимание на тот факт, что внутренняя энергия тела \mathcal{A} , в отличие от его кинетической энергии, не аддитивна по телам, составляющим тело \mathcal{A} .

Аксиома Е3а: внутренняя энергия тела \mathcal{A} является индифферентным скаляром, т.е. она не зависит от выбора системы отсчета.

Аксиома Е3б: внутренняя энергия тела \mathcal{A} не изменится, если на движение тела \mathcal{A} наложить дополнительное движение тела \mathcal{A} , как жесткого целого.

Аксиомы Е3а и Е3б эквивалентны. Следствием аксиом Е1 – Е3 являются утверждения:

а) внутренняя энергия тела \mathcal{A} , являющегося системой материальных точек, по необходимости имеет вид

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N \varphi_{i,k}(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|). \quad (2.48)$$

б) внутренняя энергия тела \mathcal{A} , состоящего из тел-точек общего вида,

по необходимости имеет вид

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N \varphi_{i,k} (\mathbf{P}_i^T \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k); \mathbf{P}_i^T \cdot \mathbf{P}_k). \quad (2.49)$$

Ионные взаимодействия должны описываться внутренней энергией типа (2.49), который никогда не привлекался для этой цели. В качестве примера возможной функции $\Psi_{i,k}$ в (2.48) приведем такую:

$$\Psi(r) = \Psi_0 e^{-r_0/r} \left[\left(\frac{r_1}{r} \right)^m - \left(\frac{r_1}{r} \right)^n \right], \quad r \equiv |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|, \quad (2.50)$$

где Ψ_0 , r_0 , r_1 , m , n — постоянные, различные, вообще говоря, для разных пар частиц, если последние неоднотипны.

Постоянные $0 < r_0 \ll r_1$ положительны и обе весьма малы. Если $r_0 = 0$, то (2.50) переходит в потенциал Леннарда–Джонса. Постоянная r_0 имеет порядок радиуса орбиты электрона в атоме. Поэтому при $r_0 \gg r_1$ (2.50) вновь совпадает с потенциалом типа Леннарда–Джонса. На первый взгляд потенциал типа (2.50) кажется странным, так как он допускает “слипание” тел-точек. Но именно это обстоятельство в целом ряде случаев сильно помогает. Принципы выбора конкретного вида потенциала довольно сложны для краткого описания, так как они связаны с вопросами существования устойчивых состояний тел и далеки от окончательных решений. Поэтому здесь мы ограничимся приведенными выше намеками.

В заключение этого пункта примем

Определение 2.18: *мощностью внешних воздействий на тело \mathcal{A} , состоящего из тел-точек \mathcal{A}_i , называется билинейная форма скоростей и воздействий*

$$N(\mathcal{A}) = \sum_{i \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}} \left[\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \boldsymbol{\omega}_i \right]. \quad (2.51)$$

Обратим внимание на то, что здесь включены силы и моменты, действующие на тело-точку со стороны окружения всего тела \mathcal{A} , а не со стороны \mathcal{A}_i^e , т.е. окружение i -го тела-точки. Кроме того, под $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ понимается собственно момент, когда в качестве точки приведения выбран вектор положения \mathbf{R}_i тела-точки \mathcal{A}_i , причем, напомним, $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ не зависит от выбора опорной точки Q .

2.6 Фундаментальные законы механики

Под фундаментальными законами механики понимают два закона динамики Эйлера (уравнение баланса количества движения и уравнение ба-

ланса кинетического момента) и два начала термодинамики, к которым относятся уравнение баланса энергии и второе начало термодинамики, не имеющее другого общепринятого наименования. Все эти законы суть некие логические утверждения, которые не вытекают из опыта и потому не могут быть опровергнуты опытным путем. Иными словами, фундаментальные законы отнюдь не являются законами Природы типа закона Всемирного тяготения. Фундаментальные законы — суть метод изучения Природы. При дальнейшем развитии механики существующие формулировки фундаментальных законов могут измениться, но не потому что неправильны, а потому что могут быть найдены их более эффективные выражения. Можно утверждать, что фундаментальные законы механики действуют на всех уровнях от атомной физики до космологии. Встречающиеся при этом проблемы суть следствия неправильного или непоследовательного применения фундаментальных законов.

2.6.1 Уравнение баланса количества движения

Формулировка первого закона динамики Эйлера: *скорость изменения количества движения тела \mathcal{A} равна силе $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ плюс скорость подвода количества движения $\mathbf{k}_1(\mathcal{A})$ в тело \mathcal{A}*

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{A}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}). \quad (2.52)$$

Для закрытых тел величина $\mathbf{k}_1(\mathcal{A})$, как правило, равна нулю. Для материальной точки уравнение (2.52) есть второй закон Ньютона. Для закрытых тел уравнение (2.52) называют первым законом динамики Эйлера, открытым им в 1750 году. Из (2.52) и аддитивности по телам количества движения и сил немедленно следует третий закон Ньютона $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$. Обратим внимание, что это равенство ничего не говорит о направлении силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Уравнение И.В.Мещерского есть просто запись уравнения (2.52).

Замечание: в физике весьма популярно мнение, что силой называется то, что стоит в правой части уравнения (2.52). Это заблуждение является источником многих недоразумений. Например, многие физики полагают, что третий закон Ньютона не выполняется в микромире. Однако в эйлеровской механике третий закон Ньютона уже не аксиома, а доказанная теорема, и она не может нарушаться. Противоречие возникает из-за того, что в микромире часто нельзя игнорировать скорость подвода количества движения в тело. Поэтому правую часть уравнения (2.52) нельзя называть силой.

У начинающих часто возникает затруднение с тем, как следует вычислять скорость подвода количества движения в тело. К сожалению, в общем случае этот вопрос не разрешен на формальном уровне, хотя на интуитивном уровне он вполне очевиден. Поэтому ограничимся двумя простыми примерами.

Пример: погрузка движущейся тележки

Пусть по рельсам движется тележка со скоростью $\mathbf{v}(t)$. При этом на тележку насыпается, например, песок. Поэтому масса $m(t)$ тележки с песком меняется во времени. Считаем, что на тележку никаких сил не действует. Это, в частности, означает, что колея прямолинейна, а трение в подшипниках колес отсутствует. Нужно найти скорость движения тележки.

Первый закон динамики записывается в виде

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}(t)] = \frac{dm(t)}{dt}\mathbf{u}(t), \quad (2.53)$$

где $dm(t)/dt$ — есть скорость подвода массы, а $\mathbf{u}(t)$ — абсолютная скорость, с которой масса $dm(t)$ подводится к тележке.

Задачу можно немного усложнить. Пусть на тележку насыпается песок двух сортов. Тогда вместо (2.53) будем иметь следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}(t)] = \rho_1(t)\mathbf{u}_1(t) + \rho_2(t)\mathbf{u}_2(t), \quad \frac{dm(t)}{dt} = \rho_1 + \rho_2, \quad (2.54)$$

где ρ_1, ρ_2 — скорости подвода массы песка первого и второго сорта соответственно; $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ суть скорости, с которыми упомянутые массы подводятся к тележке.

Движение тележки существенно зависит от подводимого к ней количества движения. Например, если песок подается из неподвижного (падает сверху в тележку) источника, то $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Если песок подается с вертолета, летящего над тележкой с той же скоростью, то $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. В первом случае скорость тележки будет уменьшаться с ростом ее массы, а во втором случае будет сохраняться неизменной. Можно, разумеется, и разгонять тележку, сбрасывая с нее песок с подходящей скоростью (реактивное движение).

Пример: задача Кейли

Чтобы еще немного пояснить особенности работы с открытыми системами, рассмотрим задачу Кейли (1857) о падающей цепочке — см. с. 114 учебника [10]. В задаче требуется исследовать движение нерастяжимой тяжелой цепи, конец которой свешивается с горизонтального стола, тогда как не вступившая еще в движение часть цепи свернута в клубок у самого края стола. Пусть $\rho = \text{const}$ и L суть погонная масса и длина цепи. В

качестве тела A выбираем свисающую часть цепи, а через x обозначим ее длину. Запишем уравнение движения свисающей части цепи

$$\frac{d}{dt} \left(\rho x \frac{dx}{dt} \right) = \rho g x - F + \frac{d(\rho x)}{dt} \frac{dx}{dt}, \quad (2.55)$$

где в левой части уравнения стоит скорость изменения количества движения свисающей части цепи. В правой части: первое слагаемое — вес свисающей части, второе слагаемое — сила, приложенная к верхнему концу свисающей части, последнее слагаемое есть скорость подвода количества движения в свисающую часть цепи. Отметим, что в уравнении, используемом Кэли, два последних слагаемых в правой части отсутствуют. Покажем, что так и должно быть. Уравнение (2.55) содержит две неизвестных функции. В качестве дополнительного уравнения запишем уравнение баланса количества движения для части цепи, лежащей на столе

$$\frac{d}{dt} [\rho (L - x) 0] = F + \frac{d\rho (L - x)}{dt} \frac{dx}{dt} \Rightarrow F = \rho \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (2.56)$$

Подставляя полученное выражение для силы F в уравнение (2.55), приходим к уравнению, использованному Кэйли без должного обоснования. Примем, что в начальный момент времени цепь находилась в покое и свисала ее бесконечно малая часть, т.е. примем следующие начальные условия

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0 \Rightarrow x = g t^2/6. \quad (2.57)$$

Здесь опущены необходимые вычисления, поскольку их можно найти в [10]. Учебники по механике останавливаются на выводе закона движения (2.57), но любители парадоксов идут дальше. Выясним сохраняется ли энергия у движущейся цепи. При $t = 0$ цепь обладала только потенциальной энергией $P_0 = \rho g L^2$. Рассмотрим момент времени t_1 , когда $x = L$, т.е. $t_1 = \sqrt{6L/g}$. В этот момент времени имеем

$$P_1 = \rho g L^2/2, \quad K_1 = \rho g L^2/3 \Rightarrow P_1 + K_1 = 5 \rho g L^2/6 \neq P_0 = \rho g L^2. \quad (2.58)$$

Спрашивается, куда пропала энергия $\rho g L^2/6$? Именно в этом усматривается парадокс. Ответ очевиден: эта часть энергии затрачена на мгновенный разгон бесконечно малых частей цепи от нулевой скорости до конечной скорости \dot{x} , т.е. в данной задаче бесконечно малые части цепи испытывают бесконечно большие ускорения. Менее тривиален вопрос о правильной записи уравнения баланса энергии в этой задаче. Собственно, именно в этом пункте и возникают наибольшие расхождения и, как следствие, парадоксы. Мы настаиваем, что уравнение баланса энергии должно

выполняться во всех случаях, но его правильное написание требует определенной практики. Проверим его выполнение в задаче Кэйли. Через \mathcal{U} обозначим массовую плотность внутренней энергии цепи, т.е. бесконечно малая часть цепи dx обладает внутренней энергией $d\mathcal{U} = \rho dx \mathcal{U}$. Поскольку цепь нерастяжима, то массовая плотность внутренней энергии постоянна. Запишем уравнение баланса энергии для свисающей части цепи

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \rho x \mathcal{U} \right] = \rho g x \frac{dx}{dt} - F \frac{dx}{dt} + \frac{d(\rho x)}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \mathcal{U} \right]. \quad (2.59)$$

Здесь первые два слагаемых в правой части определяют мощность внешних сил, действующих на свисающую часть цепи, а последнее слагаемое определяет скорость подвода энергии в систему. Нетрудно убедиться, что уравнение (2.59) для решения (2.57) тождественно выполняется. Чтобы яснее ощутить понятие подвода энергии в систему, запишем уравнение баланса энергии для всей цепочки

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \rho L \mathcal{U} \right] = \rho g x \frac{dx}{dt} + \delta. \quad (2.60)$$

Здесь δ есть скорость подвода энергии в цепочку. Полный подвод энергии в систему на интервале времени $[0, t_1]$ есть интеграл

$$\Delta = \int_0^{t_1} \delta dt = \left[\frac{1}{2} \rho x \dot{x}^2 \right]_0^{t_1} - \left[\frac{1}{2} \rho g x^2 \right]_0^{t_1} = -\frac{1}{6} \rho g L^2, \quad (2.61)$$

где использовано решение (2.57). В данном случае внутри системы происходит потеря энергии, причем энергия “не механического происхождения” имеет чисто механическую природу. Тем не менее, мы говорим, что энергия (2.61) рассеялась в окружающую среду в форме тепла. Неискушенному в механике открытых систем читателю будет полезно обдумать эту задачу во всех деталях. В частности, следует проследить происхождение и структуру подвода энергии. По аналогии с рассмотренным выше примером полезно ввести температуру и энтропию, а также дать им истолкование. В задачах такого рода очень трудно сформулировать жесткие правила. Только настойчивая практика позволит изучающим с легкостью преодолевать все возникающие проблемы. К сожалению (или к счастью), механика вообще и механика открытых систем в частности всегда будет включать в себя элементы искусства и никогда не будет принадлежать сфере чистой математики, как это виделось Лагранжу.

2.6.2 Уравнение баланса кинетического момента

Формулировка второго закона динамики Эйлера: скорость изменения кинетического момента тела \mathcal{A} , вычисленного относительно опорной точки Q , равна моменту $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ плюс скорость подвода кинетического момента $\mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A})$ в тело \mathcal{A}

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{A}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A}). \quad (2.62)$$

Этот закон для закрытых тел ($\mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A}) = \mathbf{0}$) впервые был открыт Л.Эйлером в 1776 году и носит название второго закона динамики Эйлера. В менее отчетливой форме Л. Эйлер использовал этот закон еще в 1758 году при формулировке уравнений динамики твердого тела. Как ни странно, но и в настоящее время второй закон динамики Эйлера, как фундаментальный постулат механики, не формулируется в существующих учебниках физики и механики. Относить этот закон к разряду теорем, как это считал Лагранж, разумеется нельзя. Если два закона динамики Эйлера применить к системе материальных точек, то они позволяют доказать, что внутренние силы в такой системе по необходимости являются центральными, т.е. направлены по линиям, соединяющим материальные точки. Поэтому в ньютоновской механике систем материальных точек никаких сил, кроме центральных, не существует. Экспериментально доказано, что силы между ионами в кристаллах не являются центральными. Это означает, что ионы, в общем случае, нельзя моделировать материальными точками. В качестве иллюстрации использования второго закона динамики рассмотрим простые примеры.

Пример: движение абсолютно твердого тела в центральном поле тяготения. Пусть в начале инерциальной системы отсчета расположено точечное тело с массой M . Пусть в поле тяготения этого тела движется абсолютно твердое тело \mathcal{A} с массой m . Центральный тензор инерции тела \mathcal{A} считается трансверсально изотропным и в отсчетном положении имеет вид

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad (2.63)$$

где λ, μ суть осевой и экваториальный центральные моменты инерции тела \mathcal{A} соответственно. Количество движения и кинетический момент тела \mathcal{A} задаются выражениями

$$\mathbf{K}_1 = m\dot{\mathbf{R}}(t), \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R}(t) \times m\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t), \quad (2.64)$$

где \mathbf{R}, \mathbf{P} суть вектор положения центра масс тела \mathcal{A} и тензор поворота тела \mathcal{A} соответственно, $\boldsymbol{\omega}$ есть угловая скорость тела \mathcal{A} , которая связана с

тензором поворота тела A уравнением Пуассона (2.9). В качестве опорной точки при вычислении кинетического момента выбрано начало в системе отсчета. Запишем теперь первые два закона динамики для тела A .

Уравнение баланса количества движения

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{R}}) = -G \frac{Mm}{R^3} \mathbf{R}, \quad (2.65)$$

где G есть универсальная гравитационная постоянная. Уравнение (2.65) имеет четыре интеграла движения (один скалярный и один векторный). Скалярный интеграл называется интегралом энергии трансляционного движения. Он получается после скалярного умножения обеих частей уравнения (2.65) на вектор $\dot{\mathbf{R}}$ и имеет вид

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} - G \frac{mM}{R} = \mathcal{E}_T = \text{const}, \quad (2.66)$$

где \mathcal{E}_T будем называть энергией трансляционного движения тела A . Векторный интеграл, называемый законом сохранения момента количества движения, получается после векторного умножения обеих частей уравнения (2.65) на вектор \mathbf{R} и имеет вид

$$\mathbf{R} \times m\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{H} = \text{const} \quad \implies \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (2.67)$$

Из последнего равенства видно, что траектория центра масс тела A лежит в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{H} и называемой плоскостью эклиптики. Решение задачи (2.65) – (2.67) может быть найдено во всех учебниках механики и здесь опускается.

Уравнение баланса кинетического момента имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{R}(t) \times m\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \right) = \mathbf{0}.$$

Отсюда с учетом интеграла (2.67) получаем еще один векторный интеграл, фиксирующий сохранение динамического спина тела A . Этот интеграл дается выражением

$$\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{L} = \text{const}. \quad (2.68)$$

Сохранение динамического спина элементарных частиц, очевидно, должно играть огромную роль в квантовой физике, если бы она учитывала в явном виде спинорные движения. Но, к сожалению, в настоящее время этого нет. Равенство (2.68) можно переписать в обращенной форме

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L}. \quad (2.69)$$

Решение этого уравнения совместно с уравнением Пуассона позволяет найти угловую скорость и повороты тела A . Разумеется к этим уравнениям должны быть добавлены начальные условия

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_0. \quad (2.70)$$

Здесь мы приняли, что в качестве отсчетного положения тела A выбрано его начальное положение. Решение задачи (2.69) – (2.70) рассмотрим немного подробнее. Нетрудно убедиться, что уравнение (2.69) допускает интеграл, который выражает закон сохранения энергии спинорного движения. Подчеркнем, что его нельзя называть законом сохранения вращательного движения, поскольку часть энергии вращательного движения, т.е. энергия трансляционного движения тела A вокруг центра притяжения, уже вошла в интеграл (2.66). Энергия спинорного движения вычисляется по формуле

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L}. \quad (2.71)$$

Вычисляя производную по времени от энергии \mathcal{E}_S и учитывая уравнение (2.69), немедленно убеждаемся, что энергия спинорного движения \mathcal{E}_S сохраняется неизменной. Всякий тензор поворота, как хорошо известно, выражается через три параметра. Например, через углы Эйлера. Общая теорема о представлении тензора поворота через три параметра доказана в работе [12]. Закон сохранения энергии спинорного движения $\mathcal{E}_S = \text{const}$ показывает, что три вышеупомянутые параметра должны удовлетворять одному скалярному равенству (2.71). В результате, тензор поворота, тождественно удовлетворяющий закон сохранения энергии спинорного движения, может быть выражен через два произвольных параметра. Введем обозначение

$$\mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{m}(t)) \equiv (1 - \cos \varphi) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{m} \times \mathbf{E} \quad (2.72)$$

для поворота на угол φ вокруг вектора \mathbf{m} . Тогда искомым двухпараметрический тензор поворота может быть выражен в виде композиции двух поворотов

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{e}), \quad \mathbf{m} \equiv \mathbf{L}/|\mathbf{L}| = \text{const}, \quad (2.73)$$

где угол собственного вращения φ задает вращение вокруг оси изотропии \mathbf{e} тела A , а угол прецессии ψ задает прецессию тела A вокруг постоянного

вектора динамического спина \mathbf{L} . Подстановка (2.73) в (2.71) дает

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T(\varphi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{L} = \\ &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{L} = \text{const.}\end{aligned}\quad (2.74)$$

Здесь учтены очевидные тождества

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) = \mathbf{L}, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) = \mathbf{e}.$$

Вычисляя угловую скорость композиции поворотов (2.73), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{m} + \dot{\varphi} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot (\dot{\psi} \mathbf{m} + \dot{\varphi} \mathbf{e}) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0. \quad (2.75)$$

Подставляя выражение (2.75) в уравнение (2.69) и умножая обе части получившегося уравнения на $\mathbf{Q}^T(\psi \mathbf{m})$ слева, получаем

$$\dot{\psi} \mathbf{L} + \dot{\varphi} \mathbf{l} \mathbf{e} = \mathbf{l} \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{l} \boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{l} = \sqrt{\mu^2 \omega_0^2 + (\lambda^2 - \mu^2) (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega})^2}, \quad (2.76)$$

где \mathbf{l} есть модуль вектора \mathbf{L} . Решение уравнения (2.76) находится элементарно и имеет вид

$$\psi = \frac{\mathbf{t} \mathbf{l}}{\mu}, \quad \varphi = \frac{\mathbf{t} (\mu - \lambda)}{\mu} (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{\mathbf{t} (\mu - \lambda)}{\lambda \mu} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{L}). \quad (2.77)$$

Таким образом, мы видим, что ось тела A прецессирует вокруг вектора динамического спина

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi(t) \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(t) \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi(t) \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{e}' \cdot \mathbf{L} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{L} \quad (2.78)$$

с постоянной скоростью прецессии $\dot{\psi}$ и вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг собственной оси, причем угол между осью тела и вектором его динамического спина сохраняется неизменным.

Применим теперь полученные результаты к описанию вращения Земли. Это справедливо в при пренебрежении влиянием Луны и гравитационного момента от Солнца. Как известно, моменты инерции Земли различаются весьма незначительно

$$\lambda \simeq 1,0033 \mu.$$

К сожалению, автор не знаком с деталями наблюдений по изучению вращения Земли и потому не в состоянии судить о степени их точности. Много полезных сведений о движении Земли можно найти в книге [13]. Поскольку вектор динамического спина постоянен, то он фиксирован относительно плоскости эклиптики. Считается [13], что ось Земли также

фиксирована относительно плоскости эклиптики и составляет с ней угол $66^{\circ}33'$. Согласно (2.78) одновременная фиксация и динамического спина, и оси Земли возможна тогда и только тогда, когда вектор динамического спина направлен строго по оси Земли. В таком случае имеем

$$\mathbf{L} = \lambda \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e} = \text{const}, \quad l = |\mathbf{L}| = \lambda \omega_0, \quad (2.79)$$

и различие между углами прецессии ψ и собственного вращения φ теряет смысл. Физически интерпретируема только сумма этих углов, равная, конечно, величине $t\omega_0$. С другой стороны, имеются сведения о том, что скорость вращения Земли не постоянна, а ось Земли слегка колеблется. Обычно это объясняется тем, что Земля не может считаться абсолютно твердым телом. Но, в дополнение к этому объяснению, существует и другая причина, по которой ось Земли может колебаться. Действительно, допустим, что направление динамического спина немного отличается от направления оси Земли. В этом случае ось Земли будет прецессировать вокруг вектора динамического спина и, следовательно, будет немного меняться угол между осью Земли и плоскостью эклиптики. Модуль вектора угловой скорости будет оставаться постоянным, но сам вектор угловой скорости будет также прецессировать вокруг вектора динамического спина. При этом смена суток на Земле будет определяться не вращением Земли вокруг собственной оси, а прецессией ее оси, как это видно из формул (2.77).

Пример: реакция в опоре свободно вращающегося тела. Рассмотрим абсолютно твердое тело, одна точка которого неподвижно закреплена и никаких сил, кроме реакции в опоре, на тело не действует. Эта задача мало отличается от рассмотренной выше, но мы хотим обратить внимание на одну ее особенность. Запишем уравнения движения.

Уравнение баланса количества движения

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{F}, \quad (2.80)$$

где вектор \mathbf{R} определяет положение центра масс относительно неподвижной точки, сила \mathbf{F} есть реакция в неподвижной точке. Уравнение (2.80) служит для нахождения реакции в опоре. По основной теореме кинематики имеем

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}, \quad (2.81)$$

где вектор \mathbf{r} задает положение центра масс тела в отсчетном положении. Для нахождения тензора поворота \mathbf{P} необходимо записать второй закон

динамики. Имеем

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega})' = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} = \text{const}, \quad (2.82)$$

где тензор инерции \mathbf{C} вычислен относительно неподвижной точки и является трансверсально изотропным.

Решение задачи (2.82) при заданных начальных условиях ничем не отличается от решения (2.73) – (2.77), построенного в предыдущем примере. Используя (2.80), вычислим реакцию в опоре

$$\mathbf{F} = m \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot [\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\phi} (\mathbf{e} \otimes \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}_0 \otimes \mathbf{e})] \cdot \mathbf{Q}(\phi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{r}. \quad (2.83)$$

В выражении (2.83) использованы обозначения, принятые в (2.73)–(2.77). Как видим, реакция в опоре вычисляется по довольно сложной формуле, причем ее направление меняется во времени и не совпадает с направлением вектора \mathbf{R} , определяющего положение центра масс. Вообразим теперь, что мы в состоянии измерять реакцию опоры и наблюдать вращательное движение тела. Допустим также, что мы ничего не знаем о втором законе динамики Эйлера. Возьмем далее два тела с одинаковыми тензорами инерции и зададим для них одинаковые начальные условия. В этом случае наблюдаемые движения этих двух тел будут совершенно одинаковыми. В то же время измеряемые реакции опор у этих тел могут быть совершенно разными, поскольку реакции зависят от положения центра масс в теле. Но центры масс у тел с одинаковыми тензорами инерции могут находиться в различных точках тела, причем движение центров масс неконтролируемо. Если мы стоим на позициях ньютоновой механики, то возникающая ситуация покажется нам парадоксальной, ибо наблюдаемые движения не определяют измеряемые силы. Для объяснения этого факта мы начнем придумывать вероятностные трактовки и говорить о нарушениях законов классической механики. В настоящее время для описания подобных явлений используются вероятностные законы квантовой физики.

2.6.3 Первое и второе начала термодинамики

В механике дискретных систем не обсуждаются такие понятия, как внутренняя энергия, тепло, температура, энтропия. Более того, принято считать, что основные законы термодинамики не могут быть введены в рамках классической механики. В механике сплошных сред законы термодинамики играют важную роль. Поэтому при переходе от дискретных систем к непрерывным возникает некий логический разрыв, поскольку приходится

вводить понятия, чуждые детерминированной механике дискретных систем. В данной работе общая концепция законов термодинамики не обсуждается. Тем не менее, кажется целесообразным ввести основные понятия термодинамики на элементарных примерах механики дискретных систем.

Если бы нас интересовали только системы с конечным (и не слишком большим) числом степеней свободы, то первых двух законов динамики в совокупности с определяющими уравнениями было бы вполне достаточно для полного анализа всех интересующих нас вопросов. В механике сплошных сред, т.е. систем с бесконечным числом степеней свободы, ситуация оказывается сложнее. Здесь уже невозможно описать состояние среды, пользуясь только понятиями сил и моментов. Дополнительно приходится вводить такие первичные понятия как внутренняя энергия, тепловая энергия, температура и энтропия. Собственно, понятие внутренней энергии можно ввести и в системах с конечным числом степеней свободы, где внутренняя энергия вводится как потенциал внутренних сил. В механике сплошных сред это уже не всегда возможно. Понятия температуры и энтропии знакомы практически всем. Тем не менее, их строгое определение наталкивается на серьезные затруднения. В механике сплошных сред эти затруднения до некоторой степени разрешаются формулировкой первого и второго начал термодинамики. В данной работе используются упрощенные формулировки, которые имеют своей целью на простых примерах пояснить такие основные понятия термодинамики как внутренняя энергия, температура и энтропия. В частности, понятие энтропии, используемое ниже, отличается от известных определений¹.

Уравнение баланса энергии или первый закон термодинамики: *скорость изменения полной энергии произвольной системы равна мощности внешних воздействий плюс скорость подвода энергии “не механического происхождения”, обычно в форме тепла.*

Дать общее и строгое определение понятию энергии “не механического происхождения” затруднительно. Поэтому ограничимся неопределенным заявлением о том, что энергия не механического происхождения — это та часть энергии, которая подводится не через мощность внешних воздействий. Поясним сказанное простейшим примером. Пусть два грузика, соединенные пружиной, могут совершать движения вдоль трубки с осью x . Рассмотрим две похожих ситуации. В первой из них между грузиками и стенками трубки действуют силы вязкого трения. Во втором случае стенки трубки идеально гладкие, но между грузиками вставлен демпфер

¹Энтропия, видимо, одно из наиболее туманных понятий в механике, которое используется во многих смыслах, а иногда и вовсе без смысла.

вязкого трения. Полная энергия системы имеет один и тот же вид в обоих случаях

$$E = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} c (x_1 - x_2)^2, \quad (2.84)$$

где c есть жесткость пружины. Однако уравнение баланса энергии в этих двух случаях пишется по разному

$$1. \quad \dot{E} = -b_1 \dot{x}_1^2 - b_2 \dot{x}_2^2; \quad 2. \quad \dot{E} = -b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2, \quad (2.85)$$

где постоянные коэффициенты b_1 , b_2 , b называются коэффициентами вязкости. В первом случае рассеяние энергии происходит за счет мощности внешних сил, причем подвод энергии “не механического происхождения” отсутствует. Во втором случае мощность внешних сил равна нулю, а рассеяние энергии происходит благодаря подводу (в данном случае — отводу) энергии “не механического происхождения”. При этом мы часто говорим, что энергия рассеивается в окружающую среду в виде тепла.

Каждое уравнения баланса вводит в рассмотрение новое понятие. В первом законе динамики впервые вводится понятие силы. Во втором законе динамики вводится новое понятие момента, не сводящегося к понятию момента силы. Уравнение баланса энергии вводит в рассмотрение сразу два новых понятия: внутреннюю энергию и скорость подвода энергии в систему. Немного ниже мы покажем, что и такие понятия, как температура и энтропия также вводятся посредством специальной математической формулировки уравнения баланса энергии.

Обсуждение уравнения баланса энергии проведем на элементарном примере двух грузиков, соединенных безынерционной пружиной общего вида. Предварительно рассмотрим случай одной материальной точки. При обычной трактовке подвод энергии “не механического происхождения” к материальной точке невозможен. Поэтому уравнение баланса энергии для нее имеет простейший вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.86)$$

где U есть внутренняя энергия, \mathbf{F} есть сила, действующая на материальную точку. Вычисляя производную по времени в левой части уравнения (2.86) и учитывая первый закон динамики $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$, получаем, что внутренняя энергия материальной точки постоянна. Именно поэтому в классической механике внутренняя энергия исключается из рассмотрения. Между прочим, в упомянутой постоянной энергии заключаются огромные энергии, например, атомная энергия. Ситуация изменилась бы, если бы мы захотели рассматривать распад одной частицы на несколько новых частиц.

В таком случае внутренняя энергия перестала бы быть неизменной. При этом игнорировать скорость подвода энергии уже было бы нельзя. Рассмотрим теперь тело, состоящее из двух материальных точек, соединенных безынерционной пружиной. Допустим, что внутри этого тела возможны потери энергии, например, из-за наличия демпфера между частицами. Запишем уравнение баланса энергии для рассматриваемого тела

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathcal{U} \right) = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \delta, \quad (2.87)$$

где \mathcal{U} — внутренняя энергия рассматриваемого тела, δ — скорость подвода энергии в систему; $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ — внешние силы, действующие на первую и вторую частицу соответственно.

Подчеркнем, что в силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ не входят внутренние силы. В данном случае внутренние силы — это силы, действующие на частицы со стороны пружины, а также силы внутреннего трения. Уравнение баланса энергии (2.87) можно переписать в эквивалентном виде

$$m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dot{\mathcal{U}} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \delta. \quad (2.88)$$

Уравнение (2.88) следует еще немного преобразовать и исключить из него внешние силы, поскольку они ни в какой степени не характеризуют рассматриваемую систему. Для этого выпишем уравнения движения (первый закон динамики) для обеих частиц в отдельности и для всего тела:

$$m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{1i}, \quad m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{2i}, \quad m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad (2.89)$$

где $\mathbf{F}_{1i}, \mathbf{F}_{2i}$ — внутренние силы, действующие на первую и вторую частицу соответственно.

Складывая первые два уравнения системы (2.89) и учитывая третье уравнение, получаем

$$\mathbf{F}_{1i} + \mathbf{F}_{2i} = \mathbf{0}. \quad (2.90)$$

Это аналог третьего закона Ньютона. С учетом уравнений (2.89) и (2.90) уравнению баланса энергии (2.88) можно придать следующий вид:

$$\dot{\mathcal{U}} = -\mathbf{F}_{1i} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \delta. \quad (2.91)$$

Уравнение (2.91) носит название приведенного уравнения баланса энергии. Его существенное отличие от (2.88) состоит в том, что в него не входят никакие внешние параметры. Поэтому приведенное уравнение баланса энергии характеризует саму рассматриваемую систему и оказывается удобным для дальнейшего анализа.

По определению и по физическому смыслу она не может зависеть от скоростей изменения основных кинематических переменных. Но глубокое противоречие состоит в том, что внутренняя энергия, как правило, *обязана зависеть* от неких относительных скоростей игнорируемых нами переменных. Например, при деформации кристаллической решетки ее атомы смещаются от положений равновесия, и эти смещения меняют внутреннюю энергию решетки. В то же время, известно, что атомы не покоятся в узлах решетки, а совершают быстрые колебания относительно средних положений, которые и воспринимаются нами, как положения равновесия при макроскопическом рассмотрении. Представляется очевидным, что внутренняя энергия решетки зависит от скоростей упомянутых колебаний атомов, поскольку именно эти колебания определяют многие механические свойства тела. Если бы мы полностью учли движения атомов, то и в этом случае осталась бы проблема учета движений электронов внутри атома. Даже если бы мы рассматривали систему, состоящую, например, из свободных электронов, то осталась бы проблема учета энергии электромагнитного поля. Короче говоря, Вселенная всегда будет оставаться значительно богаче любых рассматриваемых нами моделей. И эта игнорируемая нашими моделями часть Вселенной всегда будет взаимодействовать с выделенными системами и влиять на ее внутреннюю энергию. Чтобы как-то разрешить это, строго говоря, неустранимое противоречие, можно поступить следующим образом. Будем считать, что плотность внутренней энергии зависит не только от конфигурации тела, т.е. от положений частиц, составляющих тело, в данный момент времени, но и от некоего параметра, называемого энтропией \mathcal{H} . Введение энтропии является попыткой как-то учесть зависимость внутренней энергии от скоростей неучитываемых нами степеней свободы. Всегда ли это возможно? Отрицательный ответ на этот вопрос очевиден. Но замечательно то, что этот прием часто оказывается весьма удовлетворительным с практической точки зрения. Не следует только наделять энтропию некими фундаментальными, вплоть до мистических, свойствами.

Вернемся теперь к приведенному уравнению баланса энергии (2.91). Примем, что внутренняя энергия рассматриваемого тела зависит от векторов положений частиц тела и энтропии. Используя принцип независимости от выбора системы отсчета, нетрудно доказать, что внутренняя энергия рассматриваемого тела есть функция вида

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\gamma, \mathcal{H}), \quad \gamma \equiv |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2, \quad (2.92)$$

где параметр \mathcal{H} будем называть энтропией. Внутренние силы представим

в виде суперпозиции

$$\mathbf{F}_{1i} = \mathbf{F}_{1e}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, H) + \mathbf{F}_{1d}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dot{\mathbf{R}}_1, \dot{\mathbf{R}}_2, H). \quad (2.93)$$

Теперь приведенное уравнение баланса энергии (2.91) можно переписать в виде

$$\dot{U} = -\mathbf{F}_{1e} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' - \mathbf{F}_{1d} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \delta. \quad (2.94)$$

Левая часть этого равенства является полной производной по времени от внутренней энергии. Следовательно, и левая часть (2.94) должна быть полной производной. Чтобы получить полную производную введем в рассмотрение новую неизвестную переменную ϑ , которую в дальнейшем будем называть температурой, посредством равенства

$$\vartheta \dot{H} = -\mathbf{F}_{1d} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \delta. \quad (2.95)$$

Следует подчеркнуть, что равенство (2.95) не требует принятия никаких новых допущений. Правда, остается пока неясным, можно ли назвать введенный параметр ϑ температурой. Проблема в том, что, например, в статистической физике температура вводится посредством вполне определенных рассуждений, которые невозможно увязать с принятым выше способом введения температуры. В данной работе мы лишены возможности провести детальное обсуждение этого трудного вопроса. Поэтому ограничимся декларацией о том, что принятый способ введения температуры, в принципе, согласуется с механикой сплошных сред и классической термодинамикой.

Аналог уравнения (2.95) в механике сплошных сред носит название уравнения теплопроводности. Подставив (2.95) в приведенное уравнение баланса энергии (2.94), получим равенства

$$\dot{U} = -\mathbf{F}_{1e} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \vartheta \dot{H} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_{1e} = 2 \frac{\partial U}{\partial \gamma} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1), \quad \vartheta = \frac{\partial U}{\partial H}. \quad (2.96)$$

Последними двумя равенствами определяются сила упругости, возникающая при деформации пружины, и температура, если считать, что внутренняя энергия системы каким-то образом задана. Конкретный вид внутренней энергии зависит от физических свойств системы и может быть установлен только на основе интуитивных представлений, включающих знание основных экспериментальных данных. Если энтропию считать не имеющей физической размерности, то температура будет иметь смысл энергии, которую обычно называют тепловой. В общем случае температура есть энергия на единицу энтропии. Если энтропию считать имеющей

размерность, то и размерность температуры изменится. По смыслу своего введения *температура — это энергия движения системы по игнорируемым степеням свободы*. В рассматриваемом нами примере о двух грузиках, соединенных пружиной и демпфером, мы имеем

$$\mathbf{F}_{1d} = -b \left(\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2 \right),$$

где b постоянный коэффициент, называемый коэффициентом вязкости демпфера. Подставив это выражение в уравнение производства тепла (2.95), получим

$$\vartheta \dot{H} = b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 + \delta. \quad (2.97)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (2.95) есть тепло, вырабатываемое в системе в единицу времени, а второе слагаемое в правой части есть тепло, излучаемое системой в единицу времени в окружающую среду. Таким образом, вся правая часть уравнения (2.97) есть тепло, накапливаемое телом в единицу времени. Мощность излучения δ , вообще говоря, уже не определяется только свойствами тела, но зависит также и от свойств (например, температуры) окружающей среды. Определение функции δ есть отдельная задача. Примем, например, следующее определяющее уравнение для мощности излучения

$$\delta = -\eta b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2.98)$$

где коэффициент η показывает какая часть вырабатываемой в теле мощности излучается в окружающую среду. Второе из уравнений (2.85) записано для случая $\eta = 1$, когда энтропия системы сохраняется постоянной, как это следует из (2.97). Подставив (2.98) в (2.97), получим уравнение для производства тепла в следующем виде

$$\vartheta \dot{H} = (1 - \eta) b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2. \quad (2.99)$$

Следует обратить внимание на тот факт, что в правую часть (2.97) не вошли характеристики вязкого трения частиц о внешнюю среду. Упомянутые характеристики входят во внешние силы и потому исключаются из приведенного уравнения баланса энергии. Ситуация может показаться странной, поскольку, как известно, тело нагревается при трении о внешнюю среду. Однако этот нагрев должен учитываться введением некоего механизма внутри материальных точек, чтобы сделать их способными накапливать тепло.

Уравнение (2.99) служит для определения температуры в теле. Но само по себе оно недостаточно, ибо содержит две неизвестных функции:

температуру ϑ и энтропию H . Для замыкания этого уравнения необходимо дополнительное уравнение, связывающее температуру и энтропию. Трудность состоит в том, что энтропия является неизмеряемым параметром. По существу, она служит только для того, чтобы правильно определить температуру. Примем, что параметр ϑ есть температура, измеряемая термометром по некоей выбранной процедуре. Пусть, например, ϑ есть измеряемая температура корпуса демпфера. Теперь необходимо сформулировать определяющее уравнение, связывающее температуру ϑ и энтропию H . Подчеркнем, что определяющее уравнение можно формулировать только после определения смысла температуры, например, как измеряемого термометром параметра. Примем простейшее определяющее уравнение для температуры²

$$\vartheta = \vartheta(H) = c^{-1} H \quad \Rightarrow \quad H = c \vartheta, \quad (2.100)$$

где c — экспериментально определяемый параметр.

Подставляя (2.100) в (2.99), находим температуру

$$c \vartheta \dot{\vartheta} = (1 - \eta) b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 \Rightarrow \vartheta = \left[\vartheta_0^2 + \frac{2(1 - \eta)b}{c} \int_0^t (|\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 dt) \right]^{1/2},$$

где ϑ_0 — начальная температура. Если наблюдаемые экспериментальные данные удастся удовлетворительно описать при подходящем выборе постоянной c , то определяющее уравнение (2.100) можно считать приемлемым. В противном случае необходимо принимать другое определяющее уравнение. Если принять определяющее уравнение (2.100), то уравнение баланса энергии рассматриваемой системы запишется в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -b_1 |\dot{\mathbf{R}}_1|^2 - b_2 |\dot{\mathbf{R}}_2|^2 - \eta b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(E + \frac{\eta c \vartheta^2}{2(1 - \eta)} \right) = -b_1 |\dot{\mathbf{R}}_1|^2 - b_2 |\dot{\mathbf{R}}_2|^2. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Равенство (2.101) справедливо только при $\eta \neq 1$. На рассмотренном примере отчетливо видно, что никакого объективного (измеряемого) смысла энтропия сама по себе не имеет. Она служит только для того, чтобы получить приемлемое уравнение для нахождения температуры. Что касается температуры, то в данном примере это энергия движения атомов корпуса и масла демпфера, т.е. энергия движения игнорируемых степеней свободы.

²Сейчас мы не заботимся о действительном соответствии этого уравнения реальности, а хотим продемонстрировать только идею нахождения температуры.

Четвертый фундаментальный закон механики — это второй закон термодинамики, в основании которого лежит опытный факт о том, что вся механическая работа может быть переведена в тепло, но полностью перевести тепло в работу невозможно. За этим экспериментальным фактом стоит теоретическая идея фундаментальной важности о несуществовании изолированных систем, если только под системой не понимать всю проявленную и непроявленную Вселенную. Механическая работа совершается рассматриваемой системой, а потому она полностью определена и, следовательно, может быть переведена в тепло. В противоположность этому тепло — это некая характеристика состояния не только рассматриваемой системы, но и ее окружения. Тепло неизбежно излучается из системы, в том числе и в непроявленную, т.е. в неучитываемую нами, Вселенную. При этом следует подчеркнуть, что ни одна из существующих в настоящее время формулировок второго закона термодинамики не может претендовать на тот же уровень фундаментальности, каким обладают законы динамики Эйлера и уравнение баланса энергии. Более того, маловероятно, что в ближайшем будущем удастся выдвинуть такую формулировку второго закона термодинамики, которая будет полноценно отражать всю совокупность идей, связанных с этим законом. Второе начало термодинамики имеет очень много различных формулировок. В общих чертах, второе начало термодинамики утверждает, что в реальности не существует изолированных систем. Иными словами, всякая система неизбежно излучает часть своей энергии в окружающую среду.

Общая формулировка второго закона термодинамики: *тепловая энергия не может быть полностью переведена в работу и неизбежно частично теряется в виде излучения в окружающую среду.*

Следует иметь в виду, что окружающая среда не имеет границ в пространстве, т.е. “тепловые волны” неизбежно уносят часть тепловой энергии. Фактически в рациональной механике под вторым законом термодинамики понимают совокупность неких утверждений, выражающих интуитивные представления о поведении реальных систем. Примером представления такого рода является следующее рассуждение. Выше мы рассматривали две материальные точки, соединенные пружиной. При этом допускалось, что эта система способна существовать сколь угодно долго. Подобное допущение справедливо не всегда. Достаточно вспомнить о существовании радиоактивных элементов и коротко живущих элементарных частиц. В рациональной науке словесные утверждения ничего не значат, если они не находят своего отражения в тех или иных математических формулировках. В рассматриваемом случае длительное существо-

вание системы возможно тогда и только тогда, когда энергия деформации пружины³ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2} c |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2 > 0 \quad (\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_2) \quad \Rightarrow \quad c > 0.$$

Если $c < 0$, то легко убедиться, что любые бесконечно малые возмущения этой системы приведут к появлению решений, которые неограниченно возрастают во времени, что приведет к взрывному разрушению системы. Иными словами, стоит комару чихнуть на эту систему, и она разрушится. Если же $c > 0$, то система будет сопротивляться всяким попыткам ее разрушить, т.е. при приложении внешней нагрузки ее внутренняя энергия будет возрастать. Приведенное здесь рассуждение, конечно, нельзя связывать со вторым законом термодинамики, поскольку оно не связано со взаимоотношением системы с окружающей средой. Однако, если не буква, то дух этих рассуждений полностью сохраняется и при формулировке второго закона термодинамики. Ко второму закону термодинамики относятся следующие утверждения.

Первое: *тепло всегда течет от горячего к холодному.* Это утверждение известно под названием нулевого начала термодинамики. Однако его нельзя обосновать без привлечения окружающей среды (электромагнитного поля). В данной работе потоки тепла не рассматривались.

Второе: *силы трения не могут совершать положительной работы.* Для рассматриваемой нами системы из этого утверждения следуют неравенства

$$b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b > 0.$$

Третье: *при отсутствии внешних силовых и моментных воздействий всякая система стремится к равновесию с окружающей средой, например, излучает энергию в окружающую среду.* В рассмотренном выше примере это утверждение равносильно условию

$$\delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \eta.$$

Четвертое: *энтропия всякой системы либо постоянна, либо возрастает с ростом времени.* В рассмотренном примере это утверждение влечет неравенство

$$\dot{H} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \eta \leq 1.$$

³Нижеследующее условие достаточно только в линейном приближении.

Третье и четвертое утверждения в совокупности ведут к неравенству $0 \leq \eta \leq 1$, использованному в (2.98). Формулировка второго закона термодинамики считается приемлемой, если из нее вытекают следствия типа приведенных выше утверждений. Подробное изложение истории развития понятия энтропии и различные варианты формулировок второго закона термодинамики можно найти в превосходной книге [17]. Тем не менее, далеко не со всеми утверждениями книги [17] можно согласиться. В настоящее время понятия температуры и энтропии и их объективный смысл окончательно не установлены. Конечно, термометр позволяет⁴ нам измерить объективно существующую величину, называемую температурой. Мы можем попытаться подобрать такую функцию, называемую энтропией, чтобы измеряемая в эксперименте температура совпадала бы с вводимой в теории. Часто такая попытка оказывается успешной. Что касается энтропии, то ее никто и никогда не измерял. В данном пункте мы хотели дать только приблизительное представление о втором законе термодинамики.

2.7 Заключение

Выше сформулированы основные понятия эйлеровой механики и показаны ее отличительные черты. Можно надеяться, что читатель понял самое главное. А именно то, что механика открыта для творческих поисков и не может быть сведена к чистой математике. Понятно, что существует необозримый океан задач, где царствует ньютонова механика. В этих случаях эйлерова механика едва ли что-либо сможет добавить. Однако ограниченность ньютоновой механики привела к тому, что механика отказалась от изучения электричества и магнетизма и целого ряда других проблем. Хочется верить, что эйлерова механика позволит расширить сферу действия механики на задачи, исследуемые в новейшей физике. В частности, она позволяет с совершенно новой точки зрения взглянуть на проблемы квантовой физики.

Список литературы

- [1] **Ньютон И.** Математические начала натуральной философии. (Собр. тр. А.Н.Крылова. ИАН СССР. М. – Л. 1936. Т. VII.

⁴Впрочем, и здесь имеются свои нерешенные проблемы

- [2] **Ньютон И.** Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых// Ньютон И. Математические работы. ОНТИ. М. – Л. 1937. С. 25 – 166.
- [3] **Boltzmann L.** Vorlesungen über die Prinzipien der Mechanik Teil I. Leipzig, 1897, 241 s.
- [4] **Боль П.** О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике: Собр. тр. /Под ред. Л.Э.Рейзиня. Рига: Зинатне, 1974. С.73 – 198.
- [5] **Пуанкаре А.** О науке. М.: Наука, 1983, 560 с.
- [6] **Пуанкаре А.** Измерение времени// Пуанкаре А. Избр. тр. В 3-х т. Т.III. М.: Наука, 1974. С.419 – 428.
- [7] **Zaremba S.** Reflexions sur les fondements de la mecanique rationnelle// Enseignement Math. 1940. Т.38. Р. 59 – 69.
- [8] **Герц Г.** Принципы механики, изложенные в новой связи. Изд. АН СССР. М. 1959. 386 с.
- [9] **Мах Э.** Механика (Историко–критический очерк ее развития). СПб.: Общественная польза, 1909. 448 с.
- [10] **Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.** Курс теоретической механики. В 2-х т. Т. II. М.: Наука, 1983. 640 с.
- [11] **Жилин П.А.** Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла. Тр. СПбГТУ, N448, С.-Пб.: 1994. С. 3 – 38.
- [12] **Zhilin P.A.** A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies.//ZAMM Z. angew. Math. Mech. 1996. Vol. 76, №4. Р. 187 – 204.
- [13] **Куликов К.А.** Вращение Земли. М.: Недра, 1985. 159 с.
- [14] **Truesdell C., Toupin R.** The Classical Field Theories// Encyclopedia of Physics. Springer-Verl., 1960. Vol. s/1.
- [15] **Эйлер Л.** Основы динамики точки. ГИТТЛ. М. – Л., 1938. 500 с.
- [16] **Гельмгольц Г.** О сохранении силы. ГИТТЛ. М. – Л., 1934. 143 с.
- [17] **Truesdell C.** Rational Thermodynamics. Springer-Verl. New York, 1984. 578 p.

3. A new approach to the analysis of free rotations of rigid bodies

3.1 Introduction

Free rotation of rigid bodies was the first problem that was completely solved in dynamics of rigid bodies. Originally it was studied by Leonard Euler. Later Poinsot offered the famous geometrical interpretation to show real rotation of the body. In modern literature this problem is called the case of the integrability by Euler – Poinsot. Up to now no theoretical adaptations were made to the classical solution, the description of which is presented in all books on dynamics of rigid bodies. The classical solution allows perfectly to find the rotations, i.e. angular velocities, of the body. However, the determination of the turns, i.e. angles, does not impress so much. Moreover, it may be shown that the application of the Euler angles to this problem is not the best way because of several reasons. Firstly, the Euler angles, as a rule, give a representation which is rather difficult for interpretation. Secondly, this representation generates difficulties for the numerical realization on computers. By these reasons it seems to be useful to give an alternative approach to the analysis of the Euler – Poinsot problem, that is based on the concept of the tensor of turn called in the sequel turn-tensor. Some main facts concerning the turn-tensor are presented in the introduction, where the new theorem on the representation of the turn-tensor is given. The theorem allows to simplify the solution of problems of the dynamics of rigid bodies.

In Euler-Poinsot's problem it is not difficult to find four first integrals of the basic equations. Three of them are well known. They express that the angular momentum vector of the body is constant. The fourth integral is that of energy which is directly expressed in terms of turns rather than of angular velocities. The energy integral in such a form allows to construct the most suitable representation of the turn-tensor to make the picture of turns of the body clear. It is found that there exist three and only three different types of rotations. Two of them give stable rotations, and the third type describes an unstable rotation. The type of rotation is determined for the given body by initial conditions only. In fact, the third type of rotation is the

separatrix between two stable types of rotations. Under some conditions the stable rotations at certain moments of time can be very close to each other. Thus it is possible for the body to jump from one stable solution to another stable rotation. For example, the body can be rotating around the axis with minimal moment of inertia and there upon it can change the rotation to begin the rotation around the axis with maximal moment of inertia. Of course, small perturbations acting on the body are needed to provoke such a situation. As final result the problem is reduced to the integration of the simple differential equation of first order, the solution of which is a monotonically increasing function. All required quantities can be expressed in term of this function. It is shown how to see the turns of the body without integration of the equations if initial conditions are given.

In the rest part of the introduction certain aspects of the tensor of turn (turn-tensor) will be briefly presented. Partly they are known, some of them seem to be new.

The turn-tensor is the most suitable tool for the description of turns and rotations of rigid bodies (see, for example, Lagally [4]). In spite of this, up to now the turn-tensor has no applications in dynamics of rigid bodies. The main aim of the paper is to show the usefulness of the turn-tensor. As an illustration the classical Euler – Poinot problem was chosen. This problem is described in all details by many authors (see, for example, Macmillan [6], Goldstein [2], Golubev [3]). So it is possible to see advantages and shortages of the approach, that is based on an application of the turn-tensor. However, it seems to be possible that a new solution of the old problem will be interesting and useful by itself.

Below the direct tensor calculus is used (see Lagally [4] or appendix to the book by Lurie [5]). In those books one can find the initial information about the turn-tensor. From the formal point of view our presentation is rather close to that in the book by Arnold [1].

A properly orthogonal tensor \mathbf{P} is called turn-tensor and can be defined as a solution of the equations

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P} = +1,$$

where \mathbf{E} is the unit tensor.

Vectors of the position of points A and B of a rigid body will be denoted by $\mathbf{R}_A(t)$ and $\mathbf{R}_B(t)$. The basic equation of the kinematics of a rigid body has the form

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_B(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B), \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{R}(0), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E},$$

where tensor $\mathbf{P}(t)$ is called the turn-tensor of a rigid body.

The turn-tensor $\mathbf{P}(t)$ of the body does not depend on the choice of any points of the body, it describes the turns of the body and can be studied by itself.

Let us remind the **Euler theorem**: *An arbitrary turn-tensor $\mathbf{P}(t) \neq \mathbf{E}$ is represented in unique manner in the form*

$$\mathbf{P}(t) = (1 - \cos \varphi(t))\mathbf{m}(t) \otimes \mathbf{m}(t) + \cos \varphi(t)\mathbf{E} + \sin \varphi(t)\mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad (3.1)$$

where the unit vector $\mathbf{m}(t)$ is the fixed vector of $\mathbf{P}(t)$

$$\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{m}(t) = \mathbf{m}(t) \cdot \mathbf{P}(t) = \mathbf{m}(t),$$

the angle of turn, $\varphi(t)$, is supposed to be positive if the turn goes counter-clockwise.

The proof of the Euler theorem is based on the theorem of spectral decomposition of unsymmetrical second-rank tensor (see, for example, Goldstein [2]). A much more simple proof can be found in the paper by Zhilin [9]. The fixed vector $\mathbf{m}(t)$ and the angle of turn can be found from the formulae

$$1 + 2 \cos \varphi = \text{tr} \mathbf{P}, \quad 2 \sin \varphi \mathbf{m}(t) = -\mathbf{P}_{\times}, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\times} \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

where tensor \mathbf{P} on the right-hand side can be taken in any given form. Let us consider the vector of turn, $\varphi(t)$, and the logarithmic tensor of turn, $\mathbf{R}(t)$

$$\varphi(t) = \varphi(t)\mathbf{m}(t), \quad \mathbf{R}(t) = \varphi(t) \times \mathbf{E}.$$

Theorem: *The turn-tensor $\mathbf{P}(t)$ can be expressed in the form*

$$\mathbf{P}(t) = \exp \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \varphi(t) \times \mathbf{E}. \quad (3.2)$$

The expression (3.2) is one of the forms of Euler's theorem (3.1).

Definition: *The straight line spanned by the fixed vector $\mathbf{m}(t)$ of turn-tensor $\mathbf{P}(t)$ is called an axis on turn of the body.*

It is seen that there are infinitely many parallel lines and any of them can be called axis of turn. This seems to be strange. Really, if a cylinder is rotating around its own axis, then, namely, this axis appears to be named axis of turn. However, this is impossible, because only the definition given above is in accordance with Galilei's principle of relativity.

Let us consider the left, $\mathbf{S}(t)$, and the right, $\mathbf{S}_r(t)$, tensors of spin ($\dot{\varphi} \equiv d\varphi/dt$)

$$\mathbf{S}(t) \equiv \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad \mathbf{S}_r(t) \equiv \mathbf{P}^T(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t), \quad (\mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{P}^T).$$

Spin-tensors \mathbf{S} and \mathbf{S}_r are antisymmetric tensors and have accompanying vectors.

Definition: *The accompanying vector $\boldsymbol{\omega}(t)$ ($\boldsymbol{\Omega}(t)$) of the left (right) spin-tensor $\mathbf{S}(t)$ ($\mathbf{S}_r(t)$) is called the left (right) vector of angular velocity*

$$\mathbf{S}(t) \equiv \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{E}, \quad (\mathbf{S}_r \equiv \mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}).$$

These equations can be rewritten in equivalent form:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t), \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t). \quad (3.3)$$

The first of these equations is called the left Poisson equation, and the second one the right Poisson equation. There exists the relation

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}(t). \quad (3.4)$$

In dynamics of rigid bodies the vector $\boldsymbol{\omega}(t)$ is called angular velocity in the space, whereas the vector $\boldsymbol{\Omega}(t)$ is called angular velocity in the body. Of course, both of them are vectors in the space. If the turn-tensor $\mathbf{P}(t)$ is known, then it is easy to find vectors $\boldsymbol{\omega}(t)$ and $\boldsymbol{\Omega}(t)$ in the form

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T)_{\times}, \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = -\frac{1}{2}(\mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{P}})_{\times}. \quad (3.5)$$

The inverse problem, i.e. the determination of the turn-tensor, when angular velocities are known, is called the Darboux problem. If the left vector of angular velocity is known we get *the left Darboux problem*

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{P}_0^T = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P}_0 = 1.$$

If the right vector of angular velocity is known, we get *the right Darboux problem*

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{P}_0^T = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P}_0 = 1.$$

How to solve the Darboux problem is known, however it is not simple task in a general case. So it will be much better to avoid the solution of the problem in full extent. In practice it is possible.

Proposition: *Let the tensor $\mathbf{P}_l(t)$ (the tensor $\mathbf{P}_r(t)$) be a particular solution of the left (right) Poisson equation (3.3). Then the general solution of the left (right) Darboux problem has the form*

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_l(t) \cdot \mathbf{P}_l^T(0) \cdot \mathbf{P}_0, \quad (\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{P}_r^T(0) \cdot \mathbf{P}_r(t)).$$

Sometimes this fact can help to find the general solution.

Making use of Euler's theorem (3.1) and the first expression of (3.5) it is easy to get

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi} \mathbf{m}(t) + \sin \varphi(t) \dot{\mathbf{m}}(t) + (1 - \cos \varphi) \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}(t).$$

In many books on mechanics this expression is presented in a wrong form (see, for example, Golubev [3])

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{m}(t). \quad (3.6)$$

Definition: *The straight line spanned on the vector of angular velocity $\boldsymbol{\omega}(t)$ is called an axis of rotation of the body.*

Theorem:

— *If the fixed vector of the turn-tensor does not depend on time, then the axis of turn coincides with the axis of rotation;*

— *If vector $\boldsymbol{\omega}(t)$ has constant direction, then the axis of turn coincides with axis of rotation if, and only if the vector $\boldsymbol{\omega}$ is the fixed vector of turn-tensor $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(0)$.*

Therefore, it is well possible that the body turns around one axis, but at the same time the body rotates around another axis, which, for example, is orthogonal to the axis of turn. So when working with interpretation by Poinsot one must be very careful to avoid mistakes.

Let us consider the composition of turns, which are defined by turn-tensors $\mathbf{P}_2(t)$ and $\mathbf{P}_1(t)$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_2(t) \cdot \mathbf{P}_1(t). \quad (3.7)$$

Let the angular velocities $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\omega}_1(t)$ and $\boldsymbol{\omega}_2(t)$ correspond to the turn-tensors $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{P}_1(t)$ and $\mathbf{P}_2(t)$, respectively,

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t), \quad \dot{\mathbf{P}}_1(t) = \boldsymbol{\omega}_1(t) \times \mathbf{P}_1(t), \quad \dot{\mathbf{P}}_2(t) = \boldsymbol{\omega}_2(t) \times \mathbf{P}_2(t). \quad (3.8)$$

The following identity will be useful:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) = (\det \mathbf{A})(\mathbf{A}^{-T}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (3.9)$$

which is valid for any nonsingular tensor \mathbf{A} and any vectors \mathbf{a} and \mathbf{b} . If tensor \mathbf{A} is a turn-tensor \mathbf{Q} , then identity (3.9) can be simplified as follows:

$$\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}. \quad (3.10)$$

Theorem: *The left vector of an angular velocity of the composition (3.7) can be expressed in term of vectors (3.8) as follows:*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_2(t) + \mathbf{P}_2(t) \cdot \boldsymbol{\omega}_1(t). \quad (3.11)$$

The proof follows directly from (3.7):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{P}}_2 \cdot \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \dot{\mathbf{P}}_1 &\Rightarrow \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{P} + \mathbf{P}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{P}_1) \Rightarrow \\ &\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{E} + \mathbf{P}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_2^T. \end{aligned}$$

Making use of the second identity (3.10) this equality can be rewritten in the form (3.11).

In textbooks on theoretical mechanics (see Golubev [3]) the equality (1.21) takes the form

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_2(t) + \boldsymbol{\omega}_1(t). \quad (3.12)$$

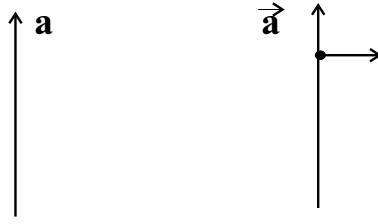


Figure 1: Vector and double vector

It is difficult to say who was the author of the formulae (3.6) and (3.12). In any case they were known at the end of the first quarter of this century.

Let us accept the notation

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \equiv (1 - \cos \varphi) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{e} \times \mathbf{E} \quad (3.13)$$

for a turn on the angle φ around the vector \mathbf{e} : $|\mathbf{e}| = 1$. For any turn-tensor \mathbf{T} the formula

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{T}^T = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}'), \quad \mathbf{e}' \equiv \mathbf{T} \cdot \mathbf{e} \quad (3.14)$$

is valid. It can be readily proved, that

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{n}) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{n}') \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}), \quad \mathbf{n}' \equiv \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}.$$

This rule of the pseudo-permutability is important in many cases.

The main merit of a turn-tensor is that it can be represented in many equivalent forms, a choice of which depends on special properties of the problem under consideration. For example, Euler's theorem (3.1) is efficient if the axis of a turn is a priori known and does not change in time. If it is not so then Euler's theorem is practically useless. However, in the latter case one can represent the general turn as the composition of the simplest turn-tensors of the form (3.13), where vector \mathbf{e} is a constant vector.

Let there be given a turn-tensor $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e})$, where $\mathbf{e} = \text{const}$. The left and the right vectors of angular velocity in such a case coincide and can be found by making use of the simplest formula (3.6),

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\varphi} \mathbf{e}, \quad \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}.$$

In order to study the rotations of the body it is useful to take the double vector into consideration, what can be done as follows. Let us take the vector \mathbf{a} , which will be called a basis. Let us connect to the vector \mathbf{a} another vector \mathbf{b} , which will be called a cross-vector (see Fig.1). The rigid construction of two vectors \mathbf{a} and \mathbf{b} will be called a double vector and denoted as $\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Let us introduce the double material "vector" $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ which is made from the points of the body. The position of the "vector" $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ determines the position of the body in a unique manner. Thus it is possible to

observe the movement of the material “vector” \overrightarrow{AB} in order to know the movement of the body. The basis of the double vector \overrightarrow{AB} will be denoted by \mathbf{AB} , where A and B are points of the body.

Let us formulate the **representation theorem of the turn-tensor**: *Let there be given two arbitrary unit vectors \mathbf{m} and \mathbf{n} . Any turn-tensor can be represented in the form of a composition of turns around vectors \mathbf{m} and \mathbf{n} :*

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta(t)\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{n}), \quad \mathbf{e} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}/|\mathbf{m} \times \mathbf{n}|, \quad (3.15)$$

where $\psi(t)$, $\vartheta(t)$, and $\varphi(t)$ are called *angle of precession*, *angle of a nutation*, and *angle of own rotation*, respectively. If the vector \mathbf{m} coincides with the vector \mathbf{n} , then a vector \mathbf{e} is any unit vector orthogonal to the vector \mathbf{m} ; in that case the angles φ , ψ , and ϑ are called *Eulerian angles*.

Proof: Let the vectors \mathbf{m} and \mathbf{n} be placed in the plane of Fig.2.

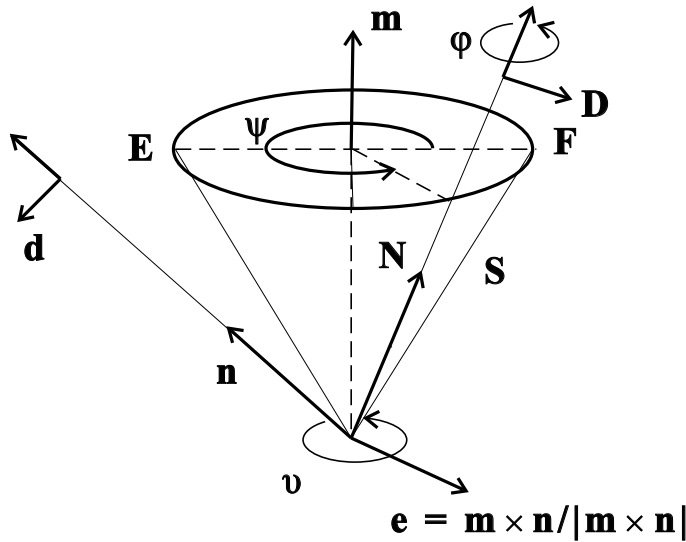


Figure 2: Representation of the turn-tensor

Let us choose the double vector \overrightarrow{d} and the double material vector \overrightarrow{AB} in such a manner, that at the moment of time $t = 0$ the vector \overrightarrow{AB} coincides with the double vector \overrightarrow{d} and in addition the basis \mathbf{d} of the double vector \overrightarrow{d} coincides with a unit vector \mathbf{n} : $\mathbf{d} = \mathbf{n}$. At the instant $t > 0$ the double material vector \overrightarrow{AB} coincides with the double vector $\overrightarrow{D}(t)$. The conic surface S on Fig.2 is made up by a rotation of the basis \mathbf{D} of the double vector \overrightarrow{D} around the unit vector \mathbf{m} . The turn-tensor $\mathbf{P}(t)$ turns the double material vector \overrightarrow{AB} in such a way, that at the instant $t = 0$ the vector \overrightarrow{AB} coincides with the double vector \overrightarrow{d} and at the moment of time $t > 0$ the vector \overrightarrow{AB} coincides with the double vector $\overrightarrow{D}(t)$. We want to construct the turn-tensor $\mathbf{P}(t)$ as a composition of the simplest turns around the axis \mathbf{m} and \mathbf{n} . Let us accept, that $\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}$.

The first turn is by the angle of nutation $\vartheta(t)$ around the unit vector \mathbf{e} (see Fig.2),

$$\mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) = (1 - \cos \vartheta)\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \cos \vartheta\mathbf{E} + \sin \vartheta \mathbf{e} \times \mathbf{E}. \quad (3.16)$$

As a result of this turn the basis \mathbf{AB} of the double material vector $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ will be placed on the surface S and the vector \mathbf{AB} coincides with the vector \mathbf{d}' ,

$$\mathbf{d}' = \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{n} \equiv \mathbf{n}'.$$

The second turn is by the angle of precession ψ around the axis \mathbf{m} :

$$\mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) = (1 - \cos \psi)\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \psi\mathbf{E} + \sin \psi \mathbf{m} \times \mathbf{E}.$$

In this case the basis \mathbf{AB} of the double material vector $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ is sliding on the surface S (see Fig.2) and after all it coincides with the basis \mathbf{D} of the double vector $\overrightarrow{\mathbf{D}}$. It is clear that

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}. \quad (3.17)$$

Finally, the third turn is by the angle of own rotation φ around the basis \mathbf{D} of the double vector $\overrightarrow{\mathbf{D}}$,

$$\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{D}) = (1 - \cos \varphi)\mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \cos \varphi\mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{D} \times \mathbf{E}.$$

After that turn the cross-vector of the double material vector $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ coincides with the cross-vector of the double vector $\overrightarrow{\mathbf{D}}$ and therefore the vector $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ coincides with the double vector $\overrightarrow{\mathbf{D}}$. Now we get the total turn-tensor $\mathbf{P}(t)$ in the form

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{D}) \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}). \quad (3.18)$$

It seems that this representation does not coincide with the equation (3.15). However, (3.18) can be written in the form (3.15). Indeed, making use of (3.14) and (3.17) we can write down

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \underbrace{\mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}^T(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi\mathbf{m})}_{\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{D})} \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) = \\ &= \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{n}). \end{aligned}$$

This expression is identical to (3.15). The turn-tensor (3.18) can be taken in another form,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{D}) \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \underbrace{\mathbf{Q}^T(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m})}_{\mathbf{E}} = \\ &= \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{D}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}') \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}), \quad (3.19) \end{aligned}$$

where $\mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}$.

Accepting $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ in (3.19) we have the classical representation of the turn-tensor expressed in terms of Eulerian angles. The full proof of the latter case can be found in the paper by Zhilin [9].

Remark: *As it can be readily seen the angles ψ , ϑ , φ are not uniquely defined. For example, the turn on the angle ϑ in (3.16) can be positive ($\vartheta > 0$) or negative one ($\vartheta < 0$). Of course, the value of the angle ϑ will be different in these cases. As a matter of fact this ambiguity is of fundamental importance. Really, the direction of the rotation is determined by initial conditions of the problem under consideration. Thus the representation of the turn-tensor must admit the freedom of choice of the direction of the rotation.*

The kinematic Euler equation immediately follows from representations (3.15) and the theorem (3.11),

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\psi}\mathbf{m} + \dot{\vartheta}\mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} + \dot{\varphi}\mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{n} = \dot{\psi}\mathbf{m} + \dot{\vartheta}\mathbf{e}' + \dot{\varphi}\mathbf{D}, \quad (3.20)$$

since the vectors \mathbf{m} , \mathbf{n} , \mathbf{e} are constant. For the right vector of angular velocity we have the result

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}\mathbf{n} + \dot{\vartheta}\mathbf{Q}^T(\varphi\mathbf{n}) \cdot \mathbf{e} + \dot{\psi}\mathbf{Q}^T(\varphi\mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}^T(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}.$$

It is curious, that the result (3.20) can be found by a wrong way. Let us take the representation of a turn-tensor in the form (3.19) and use the formulae (3.6) and (3.12). We shall get the correct result (3.20). This is so because of a superposition of two mistakes. Let us remove one of the mistakes. Let us take the representations of a turn-tensor in the form (3.15). In this case the formula (3.6) is correct for the turn-tensors $\mathbf{Q}(\psi\mathbf{m})$, $\mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e})$, and $\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{n})$. The angular velocity $\boldsymbol{\omega}(t)$ calculated through the formula (1.22) is

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\psi}\mathbf{m} + \dot{\vartheta}\mathbf{e} + \dot{\varphi}\mathbf{n},$$

which is obviously wrong. The formulae (3.6) and (3.12) are very popular in the textbooks on theoretical mechanics. However, it does not matter since when solving the problems the correct result (3.20) is used. It should be mentioned that in the books on dynamics of rigid bodies the particular cases of (3.20) are used. The theorem (3.15) plays an important role in solving of many problems. The vectors \mathbf{m} and \mathbf{n} are supposed to be unknown at the beginning. They must be chosen in the process of solving in order to find the simplest form of the solution. We have to point out that the use of Eulerian angles, as a general rule, leads to inconvenient solutions.

3.2 Free rotation of rigid bodies

This classical problem allows to see in all details how the turn-tensor is working. The solution given below seems to be too long. However, it can be seen that the large part of a solution is devoted to an answer on the question why we have to choose a turn-tensor in the offered form.

3.2.1 Statement of the problem

Let us consider a rigid body the centre of mass of which rests in some inertial frame of reference. External forces and moments do not act on the body. The position of a body at the instant $t = 0$ will be called a reference position. The position of a body at the given instant $t > 0$ will be called an actual position. The latter can be determined by a turn-tensor $\mathbf{P}(t)$: $\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}$. The central tensor of inertia of a body at $t = 0$ is specified by its spectral representation,

$$\Theta = \theta_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \theta_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3,$$

where the quantities

$$0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3, \quad \theta_1 < \theta_3, \quad \theta_3 \leq \theta_1 + \theta_2$$

are called principle moments of inertia, the vectors \mathbf{d}_k are eigenvectors of the tensor Θ at $t = 0$. In the actual position the central tensor of inertia can be represented in the form

$$\Theta^{(t)} = \mathbf{P}(t) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(t) = \sum_{k=1}^3 \theta_k \mathbf{D}_k \otimes \mathbf{D}_k, \quad \mathbf{D}_k = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{d}_k.$$

The kinetic moment (moment of momentum, angular momentum) \mathbf{L} of a body and its kinetic energy K are defined by the formulae

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t); \quad 2K = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{L}(t),$$

where the vector $\boldsymbol{\omega}(t)$ is the left vector of angular velocity. Making use of the right vector of angular velocity, $\boldsymbol{\Omega}(t)$, we can write down

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \Theta \cdot \boldsymbol{\Omega}(t); \quad h \equiv 2K = \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot \Theta \cdot \boldsymbol{\Omega}(t).$$

Euler's second law of dynamics gives

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} = \text{const}. \quad (3.21)$$

Thus we have three first integrals. Usually they are not used since they contain the turns in addition to angular velocity. However, we will work with these integrals. The equation (3.21) can be rewritten in the form

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = \text{const}, \quad (3.22)$$

where $\boldsymbol{\omega}(t)$ and $\mathbf{P}(t)$ are related by the left Poisson equation (3.3). Making use of the representation theorem of the turn-tensor (3.15) we can look for a tensor $\mathbf{P}(t)$ in the form

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{p} \times \mathbf{n})/|\mathbf{p} \times \mathbf{n}|, \quad (3.23)$$

where the unit vectors \mathbf{p} and \mathbf{n} are not a priori known, but they do not depend on time. The vector $\boldsymbol{\omega}(t)$ corresponding to the tensor (3.23) is defined by

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\psi} \mathbf{p} + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{p}) \cdot \mathbf{e} + \dot{\varphi} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}. \quad (3.24)$$

After substituting expressions (3.23) and (3.24) into the equation (3.22) we will get an equation for finding the angles ψ , ϑ , and φ . In order to find the angles ψ , ϑ and φ we have to choose unit vectors \mathbf{p} and \mathbf{n} . This choice is important to arrive at a solution of simplest form. Thus, first of all we have to point out unit vectors \mathbf{p} and \mathbf{n} . For this let us note that from the equation (3.22) follows

$$h \equiv 2K = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L}. \quad (3.25)$$

Let us show that the kinetic energy has a constant value, i.e. the quantity h , determined by (3.25), is the first integral of the equation (3.22). We have

$$\begin{aligned} \dot{h} &= \mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{L} = \\ &= \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{L} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot (\mathbf{P}^T \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{L} = \\ &= \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \text{const}. \end{aligned}$$

The energy integral (3.25) contains the turns only. In such a form this integral was never used. However, especially this form of an energy integral allows to find the most suitable form of a turn-tensor. In addition, the integral (3.25) has a clear geometrical sense: free rotations of a body go by such a manner, that the inverse central moment of inertia of a body with respect to the axis spanned on the vector \mathbf{L} and passing through the centre of mass has constant magnitude.

3.2.2 Transformation of the energy integral

In general the turn-tensor can be expressed through a set of three parameters. The energy integral gives the relation, superposed on these parameters. Therefore, only

two of them are independent variables, and free rotations of the body are two-parameter movements. Thus it is necessary to find the general form of a two-parameter turn-tensor conserving the energy. Let us introduce the unit vector $\mathbf{m}(t)$

$$l\mathbf{m}(t) \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L} = \Theta \cdot \Omega(t), \quad l \equiv |\mathbf{L}| > 0. \quad (3.26)$$

The energy integral can be rewritten in the form

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(t) \cdot \Theta^{-1} \cdot \mathbf{m}(t) &= \frac{h}{l^2} \equiv \frac{h}{l^2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{m} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{m}(t) \cdot \left(\Theta^{-1} - \frac{h}{l^2} \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{m}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

The equation (3.27) determines the bundle of the straight lines passing through the centre of mass of the body. If these straight lines are known then we are able to establish the structure of the turn-tensor by making use of (3.26). The geometrical sense of these straight lines is obvious: it is the set of those axes, passing through the centre of mass, relative to which the inverse moments of inertia of the body are the same. The bundle of the straight lines (3.27) is the ruled surface fixed in the space. It is easy to point out the equation of this surface. The vector $\mathbf{m}(t)$ can be represented as

$$\mathbf{m}(t) = x_m \mathbf{d}_1 + y_m \mathbf{d}_2 + z_m \mathbf{d}_3, \quad x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = 1, \quad (3.28)$$

where x, y, z are the axes of coordinates spanned by the vectors \mathbf{d}_k that are fixed in the space. Let us introduce the spectral representation

$$\Theta^{-1} - \frac{h}{l^2} \mathbf{E} = \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{h}{l^2} \right) \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{h}{l^2} \right) \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \left(\frac{1}{\theta_3} - \frac{h}{l^2} \right) \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \quad (3.29)$$

Let us suppose that the inequalities

$$l^2 - h\theta_1 > 0, \quad l^2 - h\theta_3 < 0 \quad (3.30)$$

are valid. It means that we eliminate the permanent rotations from the analysis for the sake of brevity. Making use of (3.28) – (3.30) the equation (3.27) can be rewritten as

$$\left(\frac{h}{l^2} - \frac{1}{\theta_3} \right) z_m^2 = \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{h}{l^2} \right) x_m^2 + \left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{h}{l^2} \right) y_m^2. \quad (3.31)$$

The type of the surface (3.31) essentially depends on the signs of coefficients in the equation (3.31). The coefficients $h\theta_3 - l^2$ and $l^2 - h\theta_1$ are always positive. The sign of the coefficient at the variable y_m^2 ,

$$\sigma \equiv l^2 - \theta_2 h, \quad (3.32)$$

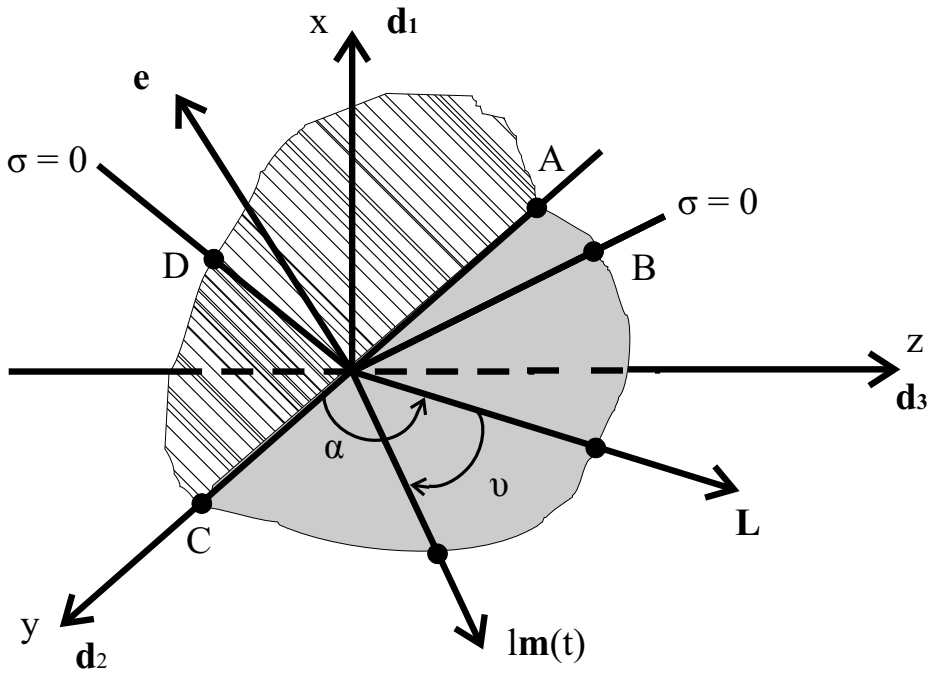


Figure 3: The case $\sigma > 0$

depends on initial conditions and can be different. There exist three different cases,

$$\text{a) } \sigma = 0, \quad \text{b) } \sigma > 0, \quad \text{c) } \sigma < 0. \quad (3.33)$$

These cases must be studied separately. The parameter σ defined by (3.32) can be represented in the form

$$\sigma = \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_3}\right) l_3^2 - \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} - 1\right) l_1^2, \quad l_k \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{d}_k. \quad (3.34)$$

As it will be seen below, rotations of a body in cases (3.33) essentially differ from each other.

3.2.3 Rotations of a body in the case $\sigma = 0$

If the parameter σ is equal to zero, then the surface (3.31) decomposes in two planes:

$$x_m = \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_3} \frac{\theta_3 h - l^2}{l^2 - \theta_1 h}} z_m \equiv \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_3} \frac{\theta_3 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1}} z_m; \quad x_m = -\sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_3} \frac{\theta_3 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1}} z_m. \quad (3.35)$$

These planes are the characteristics of a body. The vector $\mathbf{m}(t)$ must belong to one of these planes in any instant — see Fig.3, where the parts of the planes (3.35) are shown. The vector \mathbf{L} is supposed to belong to the first of planes (3.35). At the instant $t > 0$ the vector $\mathbf{m}(t)$ is a result of the turn of the vector \mathbf{L} by the turn-tensor

$\mathbf{P}^\top(t)$. It is obvious, that the vector \mathbf{L} must be turned around the normal \mathbf{e} to the plane in which it is placed. The normal vector \mathbf{e} can be found as

$$\mathbf{e} = (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{L})/|\mathbf{d}_2 \times \mathbf{L}| \equiv (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{L})/\sqrt{l^2 - l_2^2}.$$

The turn by the angle ϑ around a vector \mathbf{e} is determined by the turn-tensor $\mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e})$, where the notation (3.13) is used. It is always possible to add to this turn the turn around the vector $\hat{\mathbf{L}} \equiv \mathbf{L}/l$, since $\mathbf{Q}(\psi\hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L}$. Thus, if the parameter σ is equal to zero, then the turn-tensor is forced to admit the representation

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi\hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}), \quad \mathbf{e} = \mathbf{d}_2 \times \mathbf{L}/\sqrt{l^2 - l_2^2}, \quad \hat{\mathbf{L}} \equiv \mathbf{L}/l. \quad (3.36)$$

The vector $\mathbf{m}(t)$ takes the form

$$\mathbf{lm}(t) = \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{L} = \mathbf{Q}^\top(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{\sin \alpha} (l \sin \vartheta \mathbf{d}_2 + \sin(\alpha - \vartheta)\mathbf{L}), \quad (3.37)$$

where the notations

$$\sin \alpha = \sqrt{l^2 - l_2^2}/l, \quad \cos \alpha = l_2/l$$

are used — see Fig.3.

The left vector of an angular velocity corresponding to the turn-tensor (3.36) is calculated in accordance with (3.11)

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\psi}\hat{\mathbf{L}} + \dot{\vartheta}\mathbf{Q}(\psi\hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{e}.$$

Making use of this expression the equation (3.22) can be written in the form

$$\dot{\psi}\hat{\mathbf{L}} + \dot{\vartheta}\mathbf{Q}(\psi\hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi\hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \Theta^{-1} \cdot \mathbf{lm}(t).$$

Multiplying this equation by the tensor \mathbf{P}^\top we will get

$$\dot{\psi}\mathbf{m}(t) + \dot{\vartheta}\mathbf{e} = l\Theta^{-1} \cdot \mathbf{m}(t).$$

Since the vectors \mathbf{m} and \mathbf{e} are orthogonal, from the equation (3.36) follows

$$\dot{\psi} = \mathbf{lm} \cdot \Theta^{-1} \cdot \mathbf{m} = h/l, \quad \dot{\vartheta} = l\mathbf{e} \cdot \Theta^{-1} \cdot \mathbf{m}, \quad (3.38)$$

where the energy integral was used. Making use of (3.37) one can find

$$l\Theta^{-1} \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{l \sin \vartheta}{\theta_2} \mathbf{d}_2 + \sin(\alpha - \vartheta)\boldsymbol{\omega}_0 \right), \quad \Theta^{-1} \cdot \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega}_0 \equiv \boldsymbol{\omega}(0).$$

Now the second equation of (3.38) takes the form

$$\dot{\vartheta} = \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin \alpha} \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 \equiv -\frac{1}{2}\gamma \sin(\alpha - \vartheta), \quad \gamma \equiv -2\frac{\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_0}{\sin \alpha}. \quad (3.39)$$

The solutions of equations (3.38) and (3.39) are obvious and have the form

$$\psi(t) = \frac{ht}{l} = \frac{lt}{\theta_2}; \quad \cos(\alpha - \vartheta) = \frac{1 + \cos \alpha - (1 - \cos \alpha)e^{\gamma t}}{1 + \cos \alpha + (1 - \cos \alpha)e^{\gamma t}}, \quad (3.40)$$

where the initial conditions $\psi(0) = 0$, $\vartheta(0) = 0$ are used.

The solution (3.40) depends on the parameter γ ,

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_3} \right) \frac{l_1 l_3}{\sin \alpha} \Rightarrow \gamma = - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_3} \right) \frac{2l_1 l_3}{\sin \alpha}.$$

The sign of γ is determined by the initial conditions. If $l_1 l_3 > 0$, then $\gamma < 0$ and $\cos(\alpha - \vartheta)$ is approaching to 1 under $t \rightarrow \infty$. In this case the vector \mathbf{L} belongs to the first plane from (3.35), as it is shown on Fig.3. The angle ϑ is tending to α . The rotation of the body in this case can be readily seen. To this end let us write down the vector $\mathbf{D}_2(t)$ corresponding to the middle moment of inertia θ_2 :

$$\mathbf{D}_2(t) = \frac{\sin \vartheta}{l \sin \alpha} \mathbf{L} + \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin \alpha} \mathbf{Q} \left(\frac{lt}{\theta_2} \hat{\mathbf{L}} \right) \cdot \mathbf{d}_2 \equiv \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{d}_2.$$

At the instant $t = 0$ the vector $\mathbf{D}_2(0)$ coincides with the vector \mathbf{d}_2 . When $t > 0$ the vector $\mathbf{D}_2(t)$ rotating around the vector \mathbf{L} is asymptotically approaching the vector \mathbf{L} . When t has a great magnitude the body rotates permanently around the axis with the moment of inertia θ_2 .

It is not necessary to discuss this case in more details, because it can be readily proved, that the rotation of the body in the case $\sigma = 0$ is unstable. This means that if the vector \mathbf{L} does not belong to the plane (3.35) exactly (what is impossible in the reality) then the rotation of the body will differ from (3.40) very much. In fact the case $\sigma = 0$ is a separatrix between the stable rotations, which will be constructed below.

3.2.4 Rotations of rigid bodies in the case of positive σ

If parameter σ , determined by (3.32), has a positive magnitude, then the coefficient at variable y_m^2 is plus one. Let us eliminate the coordinate $z_m^2 = 1 - x_m^2 - y_m^2$ from the equation (3.31), which then will take a form

$$\frac{x_m^2}{a^2} + \frac{y_m^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = \frac{\theta_1(h\theta_3 - l^2)}{l^2(\theta_3 - \theta_1)}, \quad b^2 = \frac{\theta_2(h\theta_3 - l^2)}{l^2(\theta_3 - \theta_2)}. \quad (3.41)$$

The equation (3.41) is the equation of a cylindrical surface with an elliptic cross-section. The curve, described by the end of vector $\mathbf{m}(t)$, is the curve of intersection

of the surface (3.41) and the unit sphere $x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = 1$. Let us show that the semi-axes of ellipse (3.41) are less than 1. To this end let us note that

$$h\theta_3 - l^2 = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} l_1^2 + \frac{\theta_3 - \theta_2}{\theta_2} l_2^2.$$

For the semi-axes a and b we have

$$a^2 = \frac{1}{l^2} \left(l_1^2 + \frac{\theta_1 \theta_3 - \theta_2}{\theta_2 \theta_3 - \theta_1} l_2^2 \right) < \frac{1}{l^2} (l_1^2 + l_2^2) < 1,$$

$$b^2 = \frac{1}{l^2} \left(\frac{\theta_2 \theta_3 - \theta_1}{\theta_1 \theta_3 - \theta_2} l_1^2 + l_2^2 \right) = \frac{1}{l^2} \left(l_1^2 + l_2^2 + \frac{\theta_3(\theta_2 - \theta_1)}{\theta_1(\theta_3 - \theta_2)} l_1^2 \right) < 1.$$

The underlined term here is less than l_3^2 because of (3.34) and of $\sigma > 0$. It may be readily seen that

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\theta_1(\theta_3 - \theta_2)}{\theta_2(\theta_3 - \theta_1)} < 1. \quad (3.42)$$

This ratio is a characteristic of body and does not depend on initial conditions. Due to the equation (3.41) the coordinates x_m , y_m and z_m can be expressed in terms of the angle $\gamma(t)$

$$x_m = a \cos \gamma, \quad y_m = b \sin \gamma, \quad z_m = \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \gamma - b^2 \sin^2 \gamma}. \quad (3.43)$$

For the coordinate z_m the sign “+” is chosen, but it makes no difference. It is clear that inequalities

$$\sqrt{1 - b^2} \equiv z_{\min} \leq z_m \leq z_{\max} \equiv \sqrt{1 - a^2}$$

are valid. In order to have a clear idea about the turns of a body for the case $\sigma > 0$, let us rewrite equation (3.31) in the form

$$z^2 = (1 - a^2) \frac{x^2}{a^2} + (1 - b^2) \frac{y^2}{b^2}. \quad (3.44)$$

This is an equation of a conical surface with an elliptic cross-section. Let us consider the cross-section of the surface (3.44) with the plane $z = z_{\min} = \sqrt{1 - b^2}$, i.e., let us consider the ellipse

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a_1^2 = \frac{1 - b^2}{1 - a^2} a^2 < a^2. \quad (3.45)$$

Here the coordinates x , y are not coordinates of the end of a vector $\mathbf{m}(t)$ any more. Let us show the cone (3.44) in Fig.4, in which the ellipse (3.45) is the ellipse

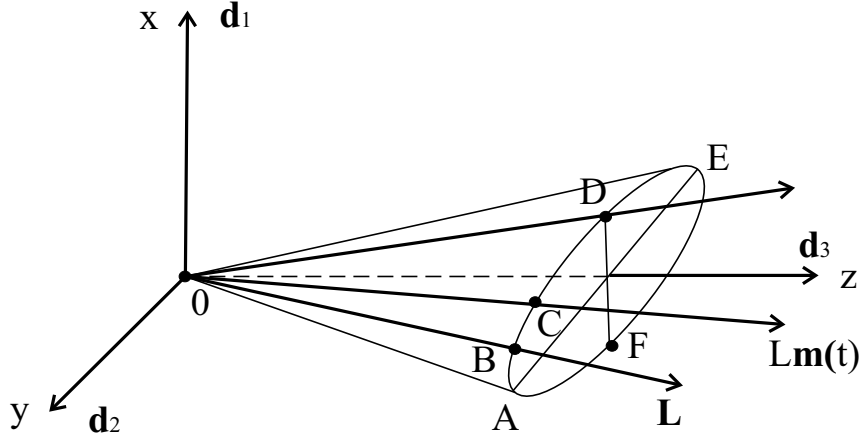


Figure 4: The case $\sigma > 0$

ADEFA with semi-axes a_1 and b and distances $OO_1 = \sqrt{1 - b^2}$, $OA = OE = 1$. All admitted vectors $\mathbf{m}(t)$ at any instant t belong to the conic surface (3.44). Two of them, namely $\mathbf{m} = \overrightarrow{OA}$ and $\mathbf{m} = \overrightarrow{OE}$ have its ends on the ellipse (3.45). The other vectors $\mathbf{m}(t)$ are tangent to the ellipse (3.45) — see Fig.4. The vector of angular momentum \mathbf{L} is also tangent to this ellipse and belongs to the conic surface (3.44) since $\mathbf{m}(0) = \hat{\mathbf{L}}$. Now it is easy to understand the structure of turn-tensor (3.23). First of all the vector \mathbf{p} in (3.23) must be chosen as $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L}/l$. Really, if it is so, then

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \quad (3.46)$$

and the angle of precession $\psi(t)$ goes out from an energy integral (3.25). Thus an energy will be conserved for any value of the angle ψ . Angles of notation ϑ and angle of own rotation φ are related by (3.25). The turn-tensor $\mathbf{Q}^T(\varphi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}^T(\vartheta \mathbf{e})$ must transfer the vector \mathbf{L} up to coincidence with a vector $\mathbf{m}(t)$ — see Fig.4. This may be done by two steps — see Fig.5, where three ellipses are shown.

The ellipse ADEFA is the cross-section of the cone (3.44) with the plane $z = \sqrt{1 - b^2}$, i.e., it is an ellipse (3.45). The ellipse $A_1D_1E_1F_1A_1$ is the cross-section of the cone (3.44) with the plane $z = z_{\max} = \sqrt{1 - a^2}$, i.e., it is an ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \quad b_1^2 = \frac{1 - a^2}{1 - b^2} b^2 > b^2.$$

An ellipse AD_1EF_1A is ellipse (3.41). A vector $\mathbf{lm}(t)$ belongs to the cone (3.44) and intersects these ellipses. Let the point C_2 be a point of intersection of a vector $\mathbf{lm}(t)$ with the ellipse AD_1EF_1A . Let us construct the cone with an apex 0 and with the circular cross-section of the radius O_1C_2 . The circle $A'C_2D'E'F'A'$ is the cross-section of this circular cone with the plane $z = z_*$, where $z_{\min} < z_* < z_{\max}$.

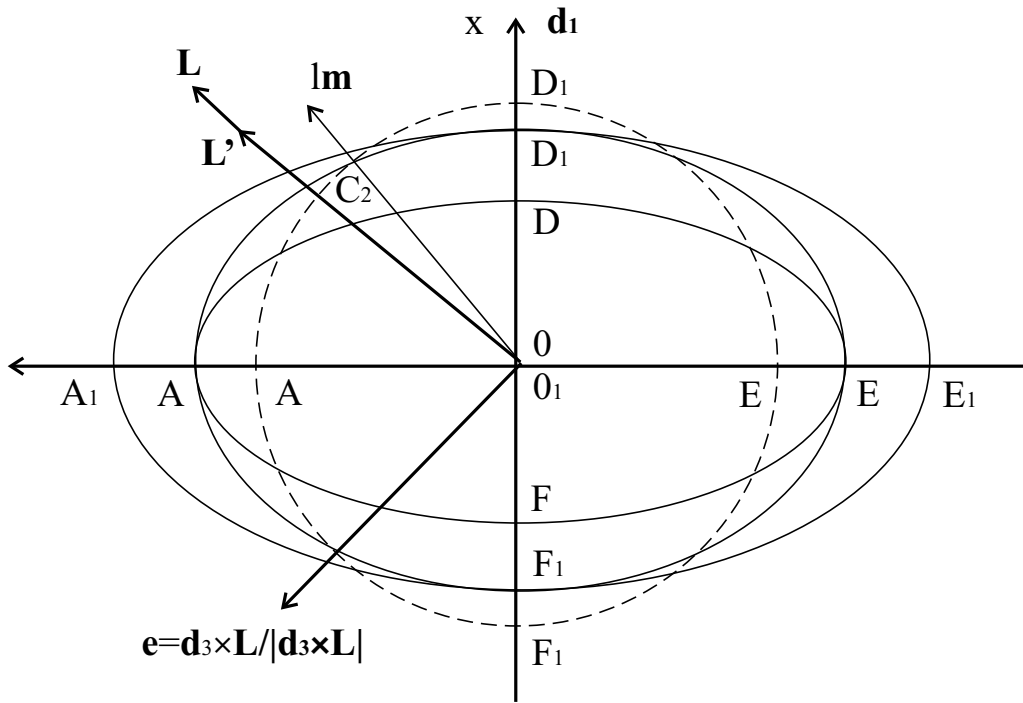


Figure 5: Determination of the turn

Now we are able to realize the two steps mentioned above. In the first step we rotate a vector \mathbf{L} by the angle ϑ around the axis \mathbf{e}

$$\mathbf{e} = \mathbf{d}_3 \times \mathbf{L} / |\mathbf{d}_3 \times \mathbf{L}| = (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{L}) / \sqrt{l^2 - l_3^2}.$$

As a result the vector \mathbf{L} will become a vector \mathbf{L}' ,

$$\mathbf{L}' = \mathbf{Q}^T(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{L}.$$

Vector \mathbf{L}' belongs to the circular cone. In the second step we rotate vector \mathbf{L}' around the axis \mathbf{d}_3 . As a result of this rotation vector \mathbf{L}' will be sliding along the circular cone up to coincidence with vector $\mathbf{lm}(t)$,

$$\mathbf{lm}(t) = \mathbf{Q}^T(\varphi \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{L}' = \mathbf{Q}^T(\varphi \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{Q}^T(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{L}.$$

Thus the vector \mathbf{n} in (3.46) is the vector \mathbf{d}_3 . Now the form of a turn-tensor is determined,

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_3). \quad (3.47)$$

The angles ϑ and φ are in a relation, which can be found as follows:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(t) &= \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{P}(t) = \\ &= \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_3) = \frac{1}{\sin \alpha} (\sin \vartheta \mathbf{d}_3 + \sin(\alpha - \vartheta) \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_3)), \end{aligned} \quad (3.48)$$

where

$$\sin \alpha = \sqrt{l^2 - l_3^2}/l, \quad \cos \alpha = l_3/l, \quad (l_k \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{d}_k). \quad (3.49)$$

The coordinates x_m, y_m, z_m of vector \mathbf{m} can be defined from (3.48):

$$x_m = \sin(\alpha - \vartheta) \cos(\beta - \varphi), \quad y_m = \sin(\alpha - \vartheta) \sin(\beta - \varphi), \quad z_m = \cos(\alpha - \vartheta), \quad (3.50)$$

where

$$\sin \beta = l_2/\sqrt{l^2 - l_3^2}, \quad \cos \beta = l_1/\sqrt{l^2 - l_3^2}.$$

Making use of (3.43) and (3.50) we can write down

$$\tan(\beta - \varphi) = \frac{b}{a} \tan \gamma, \quad \cos(\alpha - \vartheta) = \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \gamma - b^2 \sin^2 \gamma}. \quad (3.51)$$

A two-parameter representation of a turn-tensor conserving energy is known. Let us note that the conditions $\varphi(0) = 0$ and $\vartheta(0) = 0$ must be provided by the unique value of angle $\gamma_0 = \gamma(0)$. Thus for γ_0 there are two equations,

$$\tan \beta = \frac{b}{a} \tan \gamma_0, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \gamma_0 - b^2 \sin^2 \gamma_0}. \quad (3.52)$$

It can be readily shown that these equations are compatible. It is only now we are ready to solve equation (3.22). For this purpose it is convenient to rewrite equation (3.22) in terms of the right vector of angular velocity and the vector $\mathbf{m}(t)$. Making use of the formula (3.4) and (3.47) we get

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi} \mathbf{d}_3 + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}^T(\varphi \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{e} + \dot{\psi} \mathbf{m}, \quad (\mathbf{m} = \mathbf{P}^T \cdot \hat{\mathbf{L}}).$$

The equation (3.45) takes the form

$$\dot{\varphi} \mathbf{d}_3 + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}^T(\varphi \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{e} + \dot{\psi} \mathbf{m} = l \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{m}. \quad (3.53)$$

Let us take into account the identity

$$\mathbf{Q}^T(\varphi \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{l^2 - l_3^2}} (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{Q}^T(\varphi \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{L}) = \frac{1}{\sin(\alpha - \vartheta)} \mathbf{d}_3 \times \mathbf{m}.$$

Here the identity (3.10) was used. The equation (3.53) may be rewritten as

$$\dot{\varphi} \mathbf{d}_3 + \frac{\dot{\vartheta}}{\sin(\alpha - \vartheta)} \mathbf{d}_3 \times \mathbf{m} + \dot{\psi} \mathbf{m} = l \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{m}. \quad (3.54)$$

This is the basic equation that we have to solve. The first integral of (3.54) is known. It means that only two of the three scalar equations in (3.54) are independent. Projections of (3.54) on the vectors \mathbf{d}_3 and $\mathbf{m}(t)$ give

$$\dot{\varphi} - \left(\dot{\psi} - \frac{l}{\theta_3} \right) z_m = 0, \quad \dot{\varphi} z_m + \dot{\psi} = \frac{h}{l}; \quad z_m = \mathbf{m} \cdot \mathbf{d}_3 = \cos(\alpha - \vartheta).$$

It will be more useful to write down these equations in another form

$$\dot{\psi} = \frac{l}{\theta_3} + \frac{h\theta_3 - l^2}{l\theta_3} \frac{1}{1 - z_m^2} > 0, \quad \dot{\phi} = -\frac{h\theta_3 - l^2}{l\theta_3} \frac{z_m}{1 - z_m^2} < 0. \quad (3.55)$$

From the first expression of (3.51) follows

$$(1 - z_m^2) \dot{\phi} = -ab\dot{\gamma}.$$

Now the second equation from (3.55) takes the form

$$\dot{\gamma} = \omega_* \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma} > 0, \quad (3.56)$$

where

$$\omega_* \equiv \frac{l}{\theta_3} \sqrt{(1 - a^2) \frac{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2)}{\theta_1 \theta_2}}, \quad k^2 = \frac{b^2 - a^2}{1 - a^2} < 1.$$

The initial condition for the angle γ follows from (3.52). The solution of equation (3.56) may be readily constructed in terms of elliptical functions. However, the qualitative analysis does not require any integration. Let us consider Fig.4. The form of the ellipse ADEFA is determined by a body only — see (3.42). Initial conditions determine a dilatation of the ellipse. If $h\theta_3 - l^2 = 0$, then the ellipse is a point ($a = b = 0$) and we have the permanent rotation around the axis $\mathbf{d}_3 = \mathbf{D}_3(t)$: $\varphi = \vartheta = 0$, $\dot{\psi} = l/\theta_3$. When the quantity $h\theta_3 - l^2$ is increasing, then the semi-axis a and b grow in the same rate. The total turn of a body is the composition of two turns, the first of which is defined by a turn-tensor $\mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_3)$ and the second one is determined by a turn-tensor $\mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}})$. The meaning of the first turn is: the body is rotating in such a way, that the ellipse ADEFA, which is fixed with respect to the body, is turning in its plane touching to the vector \mathbf{L} , which is fixed in the space. The turn goes in the direction of a clock-wise movement since $\dot{\phi} < 0$ and at the same time the body is turning around a fixed vector $\mathbf{d}_3 \times \mathbf{L}$ in order to provide the point of contact with the vector \mathbf{L} . The angle between vectors \mathbf{L} and $\mathbf{D}_3(t)$ is changing in time. The speed of this rotation is changing too: it is maximal, when the point of contact coincides with the end of the small diameter of the ellipse and it is minimal, when the point of a contact coincides with the end of the big diameter of the ellipse. In the position shown on Fig.4 the angular velocity of the first turn is decreasing and takes the minimal value, when the point A of the ellipse will touch the vector \mathbf{L} . After that the angular velocity will be increasing and will take the maximal value when the point F of the ellipse will touch the vector \mathbf{L} and so on. From (3.56) it follows that

$$\omega_* \sqrt{1 - k^2} \leq \dot{\gamma}(t) \leq \omega_*.$$

The second turn, called precession, is superposed on the turn described above. It is a rotation around the vector \mathbf{L} . The angular velocity of rotation, i.e. $\dot{\psi}$, is positive and changes: it is maximal, when $z_m = z_{\max}$; it is minimal, when $z_m = z_{\min}$. After the determination of the function $\gamma(t)$ all characteristics of the rotation of a body can be expressed through this function. As an example let us show the formula for an absolute value of angular velocity

$$|\boldsymbol{\omega}(t)|^2 = |\boldsymbol{\Omega}(t)|^2 = \frac{l^2}{\theta_3^2} + \frac{h\theta_3 - l^2}{\theta_3^2} \left(\frac{\theta_1 + \theta_3}{\theta_1} - \frac{\theta_3(\theta_2 - \theta_1)}{\theta_1\theta_2} \sin^2 \gamma \right).$$

As a conclusion of this section let us remind that the solution of equation (3.56) can be found in the form of the series

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \omega_a t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\omega_a t)}{n \cosh(n\pi K'/K)},$$

where

$$\omega_a = \frac{\pi\omega_*}{2K}, \quad K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}, \quad K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 \gamma}}.$$

The convergence of the series is sufficiently good if $0 \leq k^2 \leq 0.98$, since even for $k^2 = 0.98$ we have $K'/K = 0.4707$.

3.2.5 Rotation of the body in the case $\sigma < 0$

The only important difference of this case to that described above is that the first rotation of the body is going around the axis \mathbf{d}_1 instead of \mathbf{d}_3 . If $\sigma = l^2 - h\theta_2 < 0$, then the coefficient of y_m^2 in equation (3.31) is negative. Eliminating the coordinate $x_m^2 = 1 - y_m^2 - z_m^2$ from (3.31) we will get

$$\frac{y_m^2}{c^2} + \frac{z_m^2}{d^2} = 1, \quad c^2 = \frac{\theta_2(l^2 - h\theta_1)}{l^2(\theta_2 - \theta_1)}, \quad d^2 = \frac{\theta_3(l^2 - h\theta_1)}{l^2(\theta_3 - \theta_1)}, \quad \frac{d^2}{c^2} < 1.$$

Let us introduce the angle $\gamma(t)$ such that

$$x_m = \sqrt{1 - d^2 \cos^2 \gamma - c^2 \sin^2 \gamma}, \quad y_m = c \sin \gamma, \quad z_m = d \cos \gamma. \quad (3.57)$$

The turn-tensor $\mathbf{P}(t)$ can be presented in the form

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_1), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{L}) / \sqrt{l^2 - l_1^2}. \quad (3.58)$$

The angles ϑ and φ here are related. In order to find out this relation it is necessary to express the vector $\mathbf{m}(t) = \mathbf{P}^T \cdot \hat{\mathbf{L}}$ in terms of the angles ϑ and φ ,

$$\mathbf{m}(t) = \frac{1}{\sin \alpha} (\sin \vartheta \mathbf{d}_1 + \sin(\alpha - \vartheta) \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_1)),$$

where

$$\sin \alpha = \sqrt{l^2 - l_1^2} / l, \quad \cos \alpha = l_1 / l.$$

The projections of $\mathbf{m}(t)$ on the unit vectors \mathbf{d}_k are

$$\begin{aligned} x_m &= \cos(\alpha - \vartheta), & y_m &= \sin(\alpha - \vartheta) \sin(\beta + \varphi), \\ z_m &= \sin(\alpha - \vartheta) \cos(\beta + \varphi), \end{aligned} \quad (3.59)$$

where

$$\sin \beta = l_2 / \sqrt{l^2 - l_1^2}, \quad \cos \beta = l_3 / \sqrt{l^2 - l_1^2}.$$

From (3.57) and (3.59) follows

$$\tan(\beta + \varphi) = \frac{c}{d} \tan \gamma, \quad \cos(\alpha - \vartheta) = \sqrt{1 - d^2 \cos^2 \gamma - c^2 \sin^2 \gamma}. \quad (3.60)$$

The right vector of an angular velocity corresponding to the turn-tensor (3.58) is calculated from the formula

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\varphi} \mathbf{d}_1 + \frac{\dot{\vartheta}}{\sin(\alpha - \vartheta)} \mathbf{d}_1 \times \mathbf{m} + \dot{\psi} \mathbf{m}.$$

The equation (3.22) takes the form

$$\dot{\varphi} \mathbf{d}_1 + \frac{\dot{\vartheta}}{\sin(\alpha - \vartheta)} \mathbf{d}_1 \times \mathbf{m} + \dot{\psi} \mathbf{m} = l \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{m}(t).$$

From this equation it follows that

$$\dot{\varphi} + \left(\dot{\psi} - \frac{l}{\theta_1} \right) x_m = 0, \quad \dot{\varphi} x_m + \dot{\psi} = \frac{h}{l}$$

or, in another form,

$$\dot{\psi} = \frac{l}{\theta_1} - \frac{l^2 - h\theta_1}{l\theta_1} \frac{1}{1 - x_m^2} > 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{l^2 - h\theta_1}{l\theta_1} \frac{x_m}{1 - x_m^2} > 0. \quad (3.61)$$

The positiveness of $\dot{\varphi}$ is obvious, and the positiveness of $\dot{\psi}$ follows from the inequalities

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &\geq \frac{l}{\theta_1} - \frac{l^2 - h\theta_1}{l\theta_1} \frac{1}{1 - (x_m^2)_{\max}}, & 1 - x_m^2 &= d^2 \cos^2 \gamma + c^2 \sin^2 \gamma = \\ & & d^2 + (c^2 - d^2) \sin^2 \gamma &\Rightarrow \dot{\psi} \geq \frac{l}{\theta_1} - \frac{l^2 - h\theta_1}{l\theta_1} \frac{1}{d^2} = \frac{l}{\theta_3} > 0. \end{aligned}$$

The first equation from (3.60) gives

$$(1 - x_m^2) \dot{\varphi} = cd \dot{\gamma}.$$

Substituting this expression in the second equation of (3.61) we get

$$\dot{\gamma}(t) = \omega_* \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma},$$

where

$$\omega_* \equiv \frac{l}{\theta_1} \sqrt{(1 - d^2) \frac{(\theta_2 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_1)}{\theta_2 \theta_3}}, \quad k^2 = \frac{c^2 - d^2}{1 - d^2} < 1.$$

The initial condition for the function $\gamma(t)$ follows from (3.60) and conditions $\vartheta(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$:

$$\tan \gamma_0 = \frac{d}{c} \tan \beta, \quad \gamma_0 \equiv \gamma(0). \quad (3.62)$$

If the function $\gamma(t)$ is known then all characteristics of the rotation of a body can be found. For example,

$$|\boldsymbol{\omega}(t)|^2 = \frac{l^2}{\theta_1^2} - \frac{l^2 - h\theta_1}{\theta_1^2} \left(\frac{\theta_1 + \theta_3}{\theta_3} + \frac{\theta_1(\theta_3 - \theta_2)}{\theta_2 \theta_3} \sin^2 \gamma \right).$$

From a formal point of view the cases $\sigma > 0$ and $\sigma < 0$ are almost the same. However, the rotation of the body in the case $\sigma > 0$ differ from that one in the case $\sigma < 0$ significantly.

3.2.6 Discussion

In order to understand and predict the behavior of a body it is not necessary to solve the problem as a whole. It is sufficient to know the form of the turn-tensor of the body

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_1), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{L}) / \sqrt{l^2 - l_1^2}, \quad \sigma < 0; \quad (3.63)$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{L}) / \sqrt{l^2 - l_2^2}, \quad \sigma = 0; \quad (3.64)$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_3), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{L}) / \sqrt{l^2 - l_3^2}, \quad \sigma > 0. \quad (3.65)$$

The angles of a precession, ψ , and own rotation, φ , are varying monotonically in all cases ($\dot{\varphi} = 0$ if $\sigma = 0$). The variation of the angle of nutation, ϑ , for $\sigma > 0$ or $\sigma < 0$ has an oscillating nature. The rotations of a body in the case $\sigma = 0$ are

unstable. The rotations of a body in the cases $\sigma > 0$ and $\sigma < 0$ are stable. However, such a conclusion is correct only in linear approximation. If the value of σ is very small ($0 < |\sigma| \leq \varepsilon \ll 1$), then the analysis of stability in a linear approximation becomes useless from the practical point of view. Let us consider the following initial conditions ($\varepsilon > 0$)

$$l_1 = \frac{l}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} + \varepsilon)^2}}, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = \frac{(\sqrt{2} + \varepsilon) l}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} + \varepsilon)^2}}, \quad \sigma > 0; \quad (3.66)$$

$$l_1 = \frac{l}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} - \varepsilon)^2}}, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = \frac{(\sqrt{2} - \varepsilon) l}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} - \varepsilon)^2}}, \quad \sigma < 0. \quad (3.67)$$

If the value of $\varepsilon > 0$ is very small, then the conditions (3.66) and (3.67) are very close. Nevertheless the rotations of a body in these cases are essentially different. Moreover, it quite well is possible for the body to jump from the “stable” solution (3.63) (corresponding to the conditions (3.66)) to another “stable” solution (3.65) which corresponds to conditions (3.67). In the first case the body was rotating around the axis with minimal moment of inertia, but after such a jump the body will be rotating around the axis with maximal moment of inertia. For this only very small perturbations acting on a body are needed. Thus if we want the body to have a stable rotation in reality, we have to avoid the case of a small value of σ .

3.3 Classical solution

The classical solution is constructed in two steps. In the first step the right angular velocity is determined. Then, in a second step, the Euler angles can be found from the solution of the right Darboux problem.

The angular momentum vector \mathbf{L} had been expressed through the right angular velocity $\boldsymbol{\Omega}(t)$

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \text{const.} \quad (3.68)$$

Let us write down the two identities

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) &= (\det \mathbf{A}) (\mathbf{A}^T)^{-1} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \\ \mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}), \end{aligned} \quad (3.69)$$

where \mathbf{a} , \mathbf{b} are arbitrary vectors, \mathbf{A} is a nonsingular second rank tensor, \mathbf{P} is a turn-tensor. If we differentiate (3.68) with respect to time, then we get — see, for example, Arnold V.I. [1].

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\Theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0. \quad (3.70)$$

These are the classical Euler equations. The tensor of inertia, Θ , in (3.70) can be represented in any form (any basis). Making use of (3.69) equation (3.70) can be written in the form

$$\dot{\mathbf{\Omega}} + \frac{1}{\theta_1\theta_2\theta_3}(\Theta \cdot \mathbf{\Omega}) \times (\Theta^2 \cdot \mathbf{\Omega}) = 0. \quad (3.71)$$

This equation was derived by L. Silberstein [7]. The merit of equations (3.70) and (3.71) is that they do not contain the turns. If all eigenvalues of Θ are different, and the vector $\mathbf{\Omega}(t)$ is not an eigenvector of Θ , then the vectors $\mathbf{\Omega}(t)$, $\Theta \cdot \mathbf{\Omega}(t)$, $\Theta^2 \cdot \mathbf{\Omega}(t)$ are linearly independent. The equation (3.71), multiplied scalarly at first by $\Theta \cdot \mathbf{\Omega}$ and than by $\Theta^2 \cdot \mathbf{\Omega}$, gives two first integrals

$$h = 2K = \mathbf{\Omega} \cdot \Theta \cdot \mathbf{\Omega} = \text{const}, \quad l^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{\Omega} \cdot \Theta^2 \cdot \mathbf{\Omega} = \text{const}. \quad (3.72)$$

Besides, equation (3.71), multiplied scalarly by the vector $\mathbf{\Omega}$, gives the equation for $\Omega^2 = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}$

$$(\Omega^2)' = 2A\Omega_1\Omega_2\Omega_3, \quad A = \frac{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1)}{\theta_1\theta_2\theta_3} > 0, \quad (3.73)$$

where \mathbf{d}_k are eigenvectors of Θ and $\Omega_k = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{d}_k$.

Equation (3.73) shows, that a rotation of a body with constant absolute value of angular velocity, $\Omega = |\mathbf{\Omega}(t)|$, is possible only in two cases: a) for permanent rotations, when only one Ω_k is not zero, i.e., $\mathbf{\Omega}$ is eigenvector of Θ ; and b) if two or three eigenvalue of Θ are the same. Integrals (3.72) hold, if we accept

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \Omega_{10}^2 + \alpha(\Omega^2 - \Omega_0^2), & \Omega_2^2 &= \Omega_{20}^2 - \beta(\Omega^2 - \Omega_0^2), \\ & & \Omega_3^2 &= \Omega_{30}^2 + \gamma(\Omega^2 - \Omega_0^2), \end{aligned} \quad (3.74)$$

where

$$\alpha = \frac{\theta_2 - \theta_1}{A\theta_3}, \quad \beta = \frac{\theta_3 - \theta_1}{A\theta_2}, \quad \gamma = \frac{\theta_3 - \theta_2}{A\theta_1}, \quad \Omega_0 \equiv \Omega \Big|_{t=0}.$$

Substituting (3.74) into (3.73) we get the equation for the quantity Ω . The solution of this equation can be found in terms of elliptic functions — see [8].

Up to here the investigation was a standard one. Now we have to consider the initial conditions for the right angular velocity $\mathbf{\Omega}(t)$. Often it is supposed that the initial condition for $\mathbf{\Omega}(t)$ does not depend on the initial position of the body. However, it is not so. At the instant $t = 0$ we know the value of the left angular velocity $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0$, i.e., we know true angular velocity. The relation (3.4) gives

$$\mathbf{\Omega}(0) \equiv \mathbf{\Omega}_0 = \mathbf{P}_0^T \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{P}_0 \equiv \mathbf{P}(0).$$

If we choose the initial position of the body as a reference position, then we will get $\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}$. In such a case the vector $\boldsymbol{\Omega}(t)$ will contain three arbitrary parameters (vector $\boldsymbol{\omega}_0$). If the reference position is chosen a priori and does not coincide with the initial position of the body, then $\mathbf{P}_0 \neq \mathbf{E}$. In this case the vector $\boldsymbol{\Omega}(t)$ depends on six arbitrary parameters (vector $\boldsymbol{\omega}_0$ and turn-tensor \mathbf{P}_0). In order to find out the turn-tensor $\mathbf{P}(t)$ we have to solve the right Darboux problem

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t), \quad \mathbf{P}\Big|_{t=0} = \mathbf{P}_0. \quad (3.75)$$

The solution of this problem does not add the new arbitrary parameters. Thus the general solution, for example the left (true) vector of angular velocity, $\boldsymbol{\omega}(t)$, will contain only six arbitrary parameters and all of them are contained in the vector $\boldsymbol{\Omega}(t)$.

Let us consider the solution of problem (3.75). We shall give two different approaches to the solution. The first approach is based on the representation of the turn-tensor in terms of Eulerian angles and contains the classical solution as a particular case. The second approach is new.

Let us represent the turn-tensor $\mathbf{P}(t)$ in terms of Eulerian angles — see the introduction.

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}_3),$$

where

$$\mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{L}} \equiv \mathbf{L}/l, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 \quad (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{L} = 0, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = 0)$$

are the unit vectors, the vector \mathbf{e}_1 is placed in the plane spanned from the vectors \mathbf{L} and $\boldsymbol{\omega}_0$.

In fact, we do not need to solve the Darboux problem (3.75) because it had been partly solved. Indeed, multiplying (3.75) by the vector \mathbf{L} from the left we get

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{P})' = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{P}) \times \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} = (\boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega},$$

where the expression (3.68) was used. It means that we know the vector $\mathbf{L} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}$,

$$\boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{L} = l \sin \vartheta (\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) + l \cos \vartheta \mathbf{e}_3. \quad (3.76)$$

From (3.76) follows

$$l \sin \vartheta \sin \varphi = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad l \sin \vartheta \cos \varphi = \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad l \cos \vartheta = \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (3.77)$$

or

$$\tan \varphi = (\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}) / (\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}), \quad \cos \vartheta = (\mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}) / l. \quad (3.78)$$

In order to find the angle of precession, ψ , it is necessary to use equation (3.75), which can be rewritten in the form

$$\mathbf{\Omega}(t) = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 + \dot{\vartheta}(\cos \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_2) + \dot{\psi}(\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega})/\mathbf{l}. \quad (3.79)$$

From this equation it follows

$$\dot{\psi} = \frac{h - \mathbf{l} \cos \vartheta \Omega_3}{\mathbf{l}^2 \sin^2 \vartheta}, \quad \psi \Big|_{t=0} = \psi_0, \quad (\Omega_k = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e}_k). \quad (3.80)$$

Up to here we do not fix the reference position of the body. Let us consider two cases of a choice of a reference position.

A. The reference position is an initial position of the body. In this case we have

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \vartheta \Big|_{t=0} = 0, \quad \varphi_0 + \psi_0 = 0, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{\Omega}_0, \quad \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega}_0 = \mathbf{L}. \quad (3.81)$$

When $t \rightarrow 0$ the quantities $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega}$ and $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega}$ tends to zero, but $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega}/\mathbf{l}$ tends to 1. We see that equations (3.77) come to identities when $t \rightarrow 0$. From (3.78) it follows that $\vartheta \rightarrow 0$ when $t \rightarrow 0$. However, it is very difficult to find out the value φ_0 from equations (3.78). Let us consider equation (3.79) at the instant $t = 0$,

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{\Omega}_0 = (\dot{\varphi}_0 + \dot{\psi}_0) \mathbf{e}_3 + \dot{\vartheta}_0(\cos \varphi_0 \mathbf{e}_1 - \sin \varphi_0 \mathbf{e}_2).$$

From this equation we see that $\varphi_0 = 0$, since $\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = 0$ and $\dot{\vartheta}_0 \neq 0$ in the general case. From (3.81) it follows that $\psi_0 = 0$. This means that the numerator in (3.78) tends to zero more quickly than the denominator. It is easy to see that the numerator in (3.80) has a zero of order 2 when $t \rightarrow 0$. Really, we have

$$h = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Omega} = \mathbf{l} (\cos \vartheta \Omega_3 + \sin \vartheta (\cos \varphi \Omega_2 + \sin \varphi \Omega_1))$$

and

$$\Omega_{20} = \mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e}_2 = 0.$$

Thus we have the expression (3.78) and (3.80) in order to find Eulerian angles ψ , ϑ , and φ . They are not good for practical calculation, but they can be used.

B. Let a reference position of the body be a position, when the eigenvector \mathbf{d}_3 of the tensor $\mathbf{\Theta}$ coincides with the vector \mathbf{L} . This case is presented in the most of books — see, for example, Macmillan [6] and Suslov [8]. In this case we have $\mathbf{e}_k = \mathbf{d}_k$. Equations (3.77), (3.78) take the form

$$\mathbf{l} \sin \vartheta \sin \varphi = \theta_1 \Omega_1, \quad \mathbf{l} \sin \vartheta \cos \varphi = \theta_2 \Omega_2, \quad \mathbf{l} \cos \vartheta = \theta_3 \Omega_3; \quad (3.82)$$

$$\tan \varphi = (\theta_1 \Omega_1)/(\theta_2 \Omega_2), \quad \cos \vartheta = (\theta_3 \Omega_3)/\mathbf{l}. \quad (3.83)$$

Here a lot of questions arises. First of all, it is difficult to find out the angle φ . Really, from equation (3.73) it follows that the quantities Ω_1 and Ω_2 must be zero at the some instants. It means that the functions $\psi(t)$ and $\varphi(t)$ will be discontinuous functions of time. The same fact follows from equations (3.82). Indeed, if we write down (3.82) at the instant $t = 0$, then we must get the identities with respect to six parameters $\psi_0, \varphi_0, \vartheta_0, \omega_0$. Is it really so? Nobody shows it. Anyway one must be very careful to use expression (3.83) and equation (3.80).

Let us consider another way of constructing the turn-tensor $\mathbf{P}(t)$. In this approach we do not use Eulerian angles. The vector $\mathbf{m}(t) = \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega}/l$ is supposed to be known. The turn-tensor $\mathbf{P}(t)$ is represented in the form

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{b}), \quad \mathbf{b} = \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{L}}/|\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{L}}| \equiv (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{L}})/|\sin \alpha|, \quad (3.84)$$

where

$$\cos \alpha = \mathbf{m}(t) \cdot \hat{\mathbf{L}} = \mathbf{\Omega}(t) \cdot \mathbf{\Theta}^2 \cdot \mathbf{\Omega}_0/l^2, \quad \alpha(0) = 0. \quad (3.85)$$

The angle $\alpha(t)$ is known. It can be readily shown that the inequality

$$0 \leq \alpha(t) < \pi$$

holds good. Let the vector $\omega_*(t)$ be the left angular velocity of the turn-tensor $\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{b})$,

$$\omega_*(t) = \dot{\alpha}(t)\mathbf{b}(t) + \sin \alpha \dot{\mathbf{b}} + (1 - \cos \alpha)\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{b}}.$$

The left angular velocity $\omega(t)$ of the turn-tensor (3.84) is equal to

$$\omega(t) = \dot{\psi} \hat{\mathbf{L}} + \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \omega_*. \quad (3.86)$$

Let us remind that $\omega \cdot \mathbf{L} = \hbar$. From equation (3.86) it follows

$$\dot{\psi} = \frac{\hbar}{l} - \omega_* \cdot \hat{\mathbf{L}} = \frac{\hbar + \mathbf{\Omega}(t) \cdot \mathbf{L}}{l(1 + \cos \alpha)}, \quad \psi \Big|_{t=0} = \psi_0. \quad (3.87)$$

The next chain of equalities,

$$\begin{aligned} \omega_* \cdot \mathbf{L} &= (1 - \cos \alpha)(\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{L} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} (\hat{\mathbf{L}} \times (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{L}})) \cdot \dot{\mathbf{b}} = \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} (\mathbf{m} - \cos \alpha \hat{\mathbf{L}}) \cdot \dot{\mathbf{b}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{b}} = -\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{b} = \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{b} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{L}}) = \frac{\hbar \cos \alpha - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}}{l(1 + \cos \alpha)} \end{aligned}$$

must be used in order to get equation (3.87). The solution (3.84), (3.85) and (3.87) contains six arbitrary parameters. The angles $\alpha(t)$ and $\psi(t)$ are continuous function of time.

3.4 Final remarks

The success of the solution of many problems in dynamics depends on the appropriate choice of the turn-tensor representation. There exist many different ways. The most popular way is the representation of the turn-tensor in terms of Eulerian angles. Our own experience shows that in most cases Eulerian angles are not advantageous tools. The only exception is the case when the angle of nutation is small. In this case the application of Eulerian angles leads to very simple solutions. Of course, we are able to use another sets of parameters instead of Eulerian angles. The main point is in which way we will do it. If we make our choice a priory we must be lucky to find a successful solution. What we wanted to show is the fact, that the set of basic parameters must be chosen in the process of the solving the task. Especially for this aim we need the theorems like the representation theorem (3.12). The turn-tensor is a necessary tool in order to keep the freedom of choice of the basic set of parameters.

The Euler – Poinot problem is the simplest case in dynamics of rigid bodies. In the most cases we have no chances to find something like the first integrals. Does it mean that the turn-tensor is useless in such cases? We are quite sure that it is not so. As an example we can point out one important (but not most important) case. In many problems of continuum mechanics of multipolar media, dynamics of gyroscopic system, dynamics of centrifuges and ultracentrifuges and so on, we deal with the case of rotation under small angles of nutation. If we use conventional methods then we will get nonlinear equations for arbitrary small angles of nutation if the other Eulerian angles are not small. Application of turn-tensor and identities like (3.9) and (3.10) allows to simplify the task significantly. Let us briefly show the way how to do it. Let us accept representation (3.15) of the turn-tensor in terms of Eulerian angles,

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta(t)\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{m}), \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{m} = 0, \quad |\vartheta(t)| \ll 1. \quad (3.88)$$

If $|\vartheta(t)|$ is small then we can use the expression

$$\mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) = \mathbf{E} + \vartheta\mathbf{e} \times \mathbf{E} + O(\vartheta^3)$$

and rewrite (3.88) in the form

$$\mathbf{P}(t) = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\gamma}(t) \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}(\beta(t)\mathbf{m}), \quad (3.89)$$

where

$$\beta(t) = \varphi(t) + \psi(t), \quad \boldsymbol{\gamma}(t) = \vartheta(t)\mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0.$$

Usually the quantities ψ , φ , β are not small but the vector $\boldsymbol{\gamma}(t)$ is small since $|\boldsymbol{\gamma}(t)| = |\vartheta(t)| \ll 1$. From (3.88) and (3.89) follows

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\beta}\mathbf{m} + \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \dot{\beta}\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{m}.$$

After that it is possible to linearize the basic equations with respect to the small vector $\boldsymbol{\gamma}$ and to construct a solution. Let us underline that linear equation can be derived only for the vector $\boldsymbol{\gamma}(t)$ rather than for a small angle $\vartheta(t)$. The equation for $\vartheta(t)$ will be always nonlinear. If we know the vector $\boldsymbol{\gamma}(t)$ it is easy to find the angle of precession, $\psi(t)$,

$$\dot{\psi}(t) = \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}) / (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}).$$

The angle $\varphi(t)$ can be found if ψ and β are known. Usually $\beta(t)$ can be found without any difficulty.

References

1. **Arnold V.I.** The mathematical methods of the classical mechanics. Moscow: Nauka, 1979. (In Russian).
2. **Goldstein H.** Classical Mechanics/ Addison-Wesley Press. Cambridge, 1950.
3. **Golubev U.F.** Foundations of Theoretical Mechanics/ Moscow State Univ. Press. Moscow, 1992. (In Russian).
4. **Lagally M.** Vorlesungen über Vektor-Rechnung/ Akad. Verlagsgesellschaft M.B.H. Leipzig, 1928.
5. **Lurie A.I.** Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1970. (In Russian).
6. **Macmillan A.M.** Theoretical Mechanics. Vol. 3: Dynamics of rigid bodies. New York – London, 1936.
7. **Silberstein L.** Vectorial Mechanics. London: Macmillan and Co, 1913.
8. **Suslov G.K.** Theoretical mechanics. Moscow, 1944. (In Russian).
9. **Zhilin P.A.** Tensor of a turn in kinematics of rigid bodies// Mechanics and Control process. Proc. of St. Petersburg's State Techn. Univ., 443. St. Petersburg, 1992. P. 100 – 121. (In Russian).

4. Rigid body oscillator: a general model and some results

4.1 Introduction

The presented discourse develops a new model named rigid body oscillator. This model plays the same role in Eulerian mechanics as the model of nonlinear oscillator in Newtonian mechanics. The importance of introducing a rigid body oscillator, or in other words a rigid body on an elastic foundation of general kind, was pointed out by many scientists. However, the problem is not formalized up to now. In the paper, all concepts necessary for a mathematical description are introduced. Some of them are new. The equations of motion are represented in an unusual form for rigid body dynamics, have simple structure, but contain a nonlinearity of complicated kind. These equations may be an interesting object for the theory of nonlinear differential equations. The solutions of some problems are presented. For the simplest case, the exact solution is found by an explicit integration of the basic equations.

The nonlinear (linear) oscillator is the most important model of classical physics. An investigation of many physical phenomena and a development of many methods of nonlinear mechanics had arisen due to this model. At the same time, the necessity of construction of models with new properties was recognized. Especially, it was important in quantum mechanics where many authors pointed out that a new model must be something like a rigid body on an elastic foundation. However, such a model was not created up to now. At the present time, two huge branches of mechanics, i.e. continuum mechanics and rigid body dynamics, are existing without close contacts. While, maybe, rigid body dynamics does not need in methods of continuum mechanics, the same can not be said with respect to continuum mechanics. This is clear from the end of the last century. The theories of rods and shells, the theory of Cosserat continuum, the theory of liquid crystals, the theory of ferromagnetic media, and other theories involve ideas from rigid body dynamics. In the theory of liquid crystals, each point of the medium is a rigid body. In the theory of multi-polar continuum, each point is a gyrostat with many rotors inside. Thus, it is clear that the theory of multi-polar continuum can not be constructed without basic

ideas of rigid body dynamics. In linear theories, there is no problem. In this case, continuum mechanics and rigid body dynamics use the same language. However, rotations of particles of media are not small in many cases. Therefore, we have to use nonlinear dynamics. In nonlinear theories, the difference between methods of rigid body dynamics and continuum mechanics is essential. Rigid body dynamics uses matrix methods or quaternion methods [13] which are not suited for aims of continuum mechanics. As a matter of fact, the only language which can be used in continuum mechanics is the tensor calculus. Thus, if we are going to apply the methods of rigid body dynamics to continuum mechanics, it is necessary to describe rigid body dynamics in terms of tensors. There are different versions of the tensor calculus. In this paper, the direct tensor calculus is used [3], [6], [9]. In Appendix A, it is shown how to transform the tensor notation into the matrix notation.

A rigid body on an elastic foundation will be called the rigid body oscillator in the following. A general model of such an object can be used in many cases, e.g. in mechanics of multi-polar continuum. For the construction of the model, three new elements are required: the turn-vector (see Appendix A for the terminology explanation), the integrating tensor, and the potential moment. Let us briefly discuss these concepts.

An unusual situation takes place with the turn-vector. On the one side, the well-known Euler theorem proves that any turn of the body can be realized as the turn around an unit vector \mathbf{n} by an angle θ . Thus, the turn can be described by a vector $\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{n}$. This fact can be found in many works on mechanics. On the other side, the same works [1] claim that the vector $\theta\mathbf{n}$ is not a vector, and a description of a turn in terms of a vector is impossible. Maybe by this reason, the turn-vector has not found great acceptance in conventional rigid body dynamics. However, namely the turn-vector plays a major role in dynamics of a rigid body on an elastic foundation. In classical mechanics, the linear differential form $\mathbf{v}dt$ is the total differential of the vector of position, i.e. $\mathbf{v}dt = d\mathbf{R}$. This is not true for rotations. If the vector $\boldsymbol{\omega}$ is a vector of angular velocity, then the linear differential form $\boldsymbol{\omega}dt$ is not a total differential of the turn-vector. However, it can be proved that there exists an integrating tensor \mathbf{Z} that transforms the linear differential form $\boldsymbol{\omega}dt$ into the total differential $d\boldsymbol{\theta}$ of the turn-vector $\boldsymbol{\theta}$ [11]. The integrating tensor \mathbf{Z} plays the decisive role for an introduction of a potential moment which expresses an action of the elastic foundation on the rigid body. Thus, it is an essential element of a general model of a rigid body oscillator.

The basic equations of dynamics of a rigid body oscillator contain a strong non-linearity, but their form is rather simple. These equations give a very interesting object for applying methods of nonlinear mechanics. In the paper, some simple examples are considered. In particular, the basic equations are integrated explicitly in

the case of the simplest model.

4.2 Mathematical preliminaries

In this section, certain aspects of the turn-tensor and the turn-vector will be briefly presented. Some initial definitions can be found in [10].

4.2.1 Vector of turn

The turn-vector is a very old concept. It is difficult to find another concept, for which there exist so many inconsistent propositions as for the turn-vector. Because of this, it seems to be necessary to give the strict introduction of the turn-vector and to describe its basic properties. The introduction of the turn-vector is determined by the well-known Euler statement: any turn can be represented as the turn around some axis \mathbf{n} by a certain angle θ . The vector $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$, is called a turn-vector. Note that two different mathematical concepts correspond to one physical (or geometrical) idea of turn. One of them is described by a turn-tensor, the other is described by a turn-vector. Of course, both of them are connected uniquely. For the turn-tensor we shall use the notation [10] — see Appendix A for additional explanations of notations and terminology

$$\mathbf{Q}(\theta \mathbf{n}) = (1 - \cos \theta) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (4.1)$$

An action of the tensor $\mathbf{Q}(\theta \mathbf{n})$ on the vector \mathbf{a} can be expressed in the form

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Q}(\theta \mathbf{n}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \cos \theta (\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{a}. \quad (4.2)$$

If $\mathbf{n} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, then $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$. If $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$, then we have

$$\mathbf{a}' = \cos \theta \mathbf{a} + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{a}.$$

This means that the vector \mathbf{a}' represents the vector \mathbf{a} turned around the vector \mathbf{n} by an angle θ . Representation (4.1) can be rewritten also as

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{E} + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{R} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R}^2 = \exp \mathbf{R}, \quad (4.3)$$

where

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{R}^2 = \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} - \theta^2 \mathbf{E}, \quad \theta = |\boldsymbol{\theta}|. \quad (4.4)$$

Let us show the derivation of the second equality in (4.3). By definition we have

$$\exp \mathbf{R} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{R}^k, \quad \mathbf{R}^{2k+1} = (-\theta^2)^k \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}^{2k} = (-\theta^2)^{k-1} \mathbf{R}^2, \quad k \geq 1.$$

From this follows

$$\exp \mathbf{R} = \mathbf{E} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^k}{(2k+1)!} \right) \mathbf{R} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^{k-1}}{(2k)!} \right) \mathbf{R}^2.$$

If we take into account the power series for $\cos \theta$ and $\sin \theta$, we obtain (4.3), which in matrix notations can be found in [1]. Note that there exists a certain difference between representations (4.1) and (4.3). In (4.1) the quantity θ is the angle of turn and can be both positive and negative. In (4.3) the quantity θ is the modulus of the turn-vector, i.e. the modulus of the angle of turn. Such an interpretation is possible since, e.g. $\sin \theta / \theta = \sin |\theta| / |\theta|$. As a rule, representation (4.3) is more convenient for applications than expression (4.1).

Let us consider a superposition of two turns

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\varphi) \cdot \mathbf{Q}(\psi). \quad (4.5)$$

The vector of total turn θ is connected with the turn-vectors φ and ψ by the formulas

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathbf{Q}(\theta) &= 1 + 2 \cos \theta = \cos \varphi + \cos \psi + \cos \varphi \cos \psi - \\ &- 2 \frac{\sin \varphi \sin \psi}{\varphi \psi} \varphi \cdot \psi + \frac{(1 - \cos \varphi)(1 - \cos \psi)}{\varphi^2 \psi^2} (\varphi \cdot \psi)^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} -[\mathbf{Q}(\theta)]_{\times} &= 2 \frac{\sin \theta}{\theta} \theta = \\ &= \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} (1 + \cos \psi) - \frac{(1 - \cos \varphi) \sin \psi}{\varphi^2 \psi} \varphi \cdot \psi \right) \varphi + \\ &+ \left(\frac{\sin \psi}{\psi} (1 + \cos \varphi) - \frac{(1 - \cos \psi) \sin \varphi}{\psi^2 \varphi} \varphi \cdot \psi \right) \psi + \\ &+ \left(\frac{\sin \varphi \sin \psi}{\varphi \psi} - \frac{(1 - \cos \varphi)(1 - \cos \psi)}{\varphi^2 \psi^2} \varphi \cdot \psi \right) \varphi \times \psi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Note that from expressions (4.3), (4.4) follows

$$\mathbf{R} \cdot \theta = 0, \quad \mathbf{Q}(\theta) \cdot \theta = \theta. \quad (4.8)$$

4.2.2 Integrating tensor

For rotations the turn-vector $\theta(t)$ plays the same role as the vector $\mathbf{R}(t)$ for translations. In the latter case, the translation velocity \mathbf{v} can be found by means of a simple formula, i.e. $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}(t)$. This means that the linear form $\mathbf{v} dt$ is the total differential of the position vector. For the rotations the situation is more complicated, since the

linear form ωdt is not the total differential of the turn-vector θ , where ω is the vector of angular velocity. Thus, it is necessary to find an integrating factor that transforms the linear form ωdt to the total differential $d\theta$ of the turn-vector. For this end, let us consider the left Poisson equation [10]

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}(\theta). \quad (4.9)$$

This equation for the turn-tensor $\mathbf{Q}(\theta)$ is equivalent to a system of nine scalar equations but only three of them are independent. In order to find these independent equations, it is possible to substitute $\mathbf{Q}(\theta)$ in Eq. (4.9) by equality (4.3). After some transformations given in Appendix B we find

$$\dot{\theta}(t) = \mathbf{Z}(\theta) \cdot \boldsymbol{\omega}(t), \quad (4.10)$$

where

$$\mathbf{Z}(\theta) = \mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{R} + \frac{1-g}{\theta^2}\mathbf{R}^2, \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}. \quad (4.11)$$

The tensor $\mathbf{Z}(\theta)$ will be called the integrating tensor in the following. The tensor \mathbf{Z} has the determinant

$$\det \mathbf{Z}(\theta) = \theta^2/2(1 - \cos \theta) \neq 0.$$

Strictly speaking, we must exclude the singular points $\theta = 2\pi k$, $k \geq 1$, where k is a positive integer, from the consideration. However, it seems to be obvious that there exist only following alternatives: either $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}$ and θ may have an arbitrary value, or $\boldsymbol{\omega} \neq \dot{\theta}$ and θ is forced to be less than π . In the first case, we have $\boldsymbol{\omega} \times \theta = \mathbf{0}$ and expression (4.10) or, what is the same, (4.15) is valid. In the second case, the θ can not be a singular point. These alternatives are obvious from the geometrical point of view, but its strict proof is unknown. It can be shown [11] that if $\theta^2 \gg 1$, then the equality $\theta \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ must be valid. As a matter of fact, we do not know problems where the singular points lead to noticeable difficulties.

The integrating tensor has a number of useful properties. Let us describe some of them. First of all, the tensor $\mathbf{Z}(\theta)$ is an isotropic function of the turn-vector θ which means

$$\mathbf{Z}(\mathbf{S} \cdot \theta) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}(\theta) \cdot \mathbf{S}^T \quad \forall \mathbf{S} : \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{S} = 1. \quad (4.12)$$

If $\mathbf{S}=\mathbf{Q}(\theta)$, then it follows from (4.12) and (4.8)

$$\mathbf{Z}(\theta) \cdot \mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\theta) \cdot \mathbf{Z}(\theta).$$

Further, we can prove the identity

$$\mathbf{Z}^T(\theta) = \mathbf{Q}(\theta) \cdot \mathbf{Z}(\theta) = \mathbf{Z}(\theta) \cdot \mathbf{Q}(\theta). \quad (4.13)$$

For the right angular velocity $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\omega}$, see [10], it follows from expressions (4.10) and (4.13)

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(t). \quad (4.14)$$

This equation is equivalent to the right Poisson equation [10]. In an explicit form, Eqs. (4.10) and (4.14) can be rewritten as

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0; \quad (4.15)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0. \quad (4.16)$$

In [5] one can find expression (4.15) in terms of a vector of a finite rotation

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_* = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}_* \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{4}\boldsymbol{\theta}_* (\boldsymbol{\theta}_* \cdot \boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\theta}_* = \frac{2}{\theta} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \boldsymbol{\theta}.$$

This expression coincides with (4.15). Thus, we see that generally speaking almost all our expressions are known. However, paper [1] deals with a turn-tensor without a turn-vector, book [5] deals with a turn-vector without a turn-tensor. Besides, the vector of finite rotation $\boldsymbol{\theta}_*$ is not convenient in some cases since it is discontinuous. Problem (4.15) is called the left Darboux problem[10]. If the left angular velocity is known, then the turn-vector (and therefore the turn-tensor) can be found as the solution of differential Eq. (4.15).

Expressions (4.15) and (4.16) can also be written in an equivalent form

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = g\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta}\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}, \quad (4.17)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = g\boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta}\dot{\theta}\boldsymbol{\theta} \quad (4.18)$$

by taking into account the identities

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \theta\dot{\theta}.$$

Sometimes it is more convenient to use an inverse form of Eqs. (4.10) – (4.14)

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}(t), \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{Z}^{-T}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}(t), \quad (4.19)$$

where

$$\mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2 \quad (4.20)$$

according to Appendix B.

4.2.3 Potential moment

Let us introduce a concept of potential moment. This concept is necessary for a statement and an analysis of many problems. Nevertheless a general definition of potential moment is absent in the literature.

Definition: A moment $\mathbf{M}(\mathbf{t})$ is called potential, if there exists a scalar function $U(\boldsymbol{\theta})$ depending on a turn-vector such that

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\dot{U}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.21)$$

see Appendix C. Making use of Eq. (4.10), this equality can be rewritten in the form

$$\left(\mathbf{M} + \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{Z} \right) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0.$$

This equality must be satisfied for any vector $\boldsymbol{\omega}$ which is possible if and only if

$$\mathbf{M} = -\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}, \quad (4.22)$$

where $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega})$ is an arbitrary function of vectors $\boldsymbol{\theta}$ and $\boldsymbol{\omega}$.

Definition: A moment \mathbf{M} is called positional, if \mathbf{M} depends on the turn-vector $\boldsymbol{\theta}$ only. For the positional moment $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ we have

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{dU(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.23)$$

Let us show two simple examples. If the potential function has a form of an isotropic function of the turn-vector

$$U(\boldsymbol{\theta}) = F(\boldsymbol{\theta}^2) = F(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}),$$

then we find from expressions (4.23) and (4.11)

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = -2 \frac{dF(\boldsymbol{\theta}^2)}{d(\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta}.$$

If a potential function has the simplest form $U(\boldsymbol{\theta}) = C\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}$, $C = \text{const}$, $\mathbf{k} = \text{const}$, $|\mathbf{k}| = 1$, then we have a rather complicated expression for the moment:

$$\mathbf{M} = -C\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k} = -C \left(\mathbf{k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} + \frac{1-g}{\boldsymbol{\theta}^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k}) \right).$$

Definition : The potential $U(\boldsymbol{\theta})$ is called transversally isotropic with an axis of symmetry \mathbf{k} , if the equality

$$U(\boldsymbol{\theta}) = U[\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\theta}]$$

holds for any turn-tensor $\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k})$. It can be proved — see [11] and Appendix D — that a general form of a transversally isotropic potential can be expressed as a function of two arguments

$$U(\boldsymbol{\theta}) = F(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}, \theta^2). \quad (4.24)$$

For this potential one can derive the expression

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = -2 \frac{\partial F}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} - \frac{\partial F}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k}. \quad (4.25)$$

There exists the obvious identity

$$(\mathbf{E} - \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})) \cdot \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{E} - \mathbf{Q}^T) \cdot \boldsymbol{\theta} = 0 \implies (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}') \cdot \boldsymbol{\theta} = 0$$

for arbitrary $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\alpha}$. Taking into account this identity, we may obtain from expression (4.25)

$$(\mathbf{E} - \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta})) \cdot \mathbf{M} = \frac{\partial F}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}.$$

Multiplying this equality by the vector \mathbf{k} we obtain

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{M} = 0. \quad (4.26)$$

For the isotropic potential, equality (4.26) holds for any vector $\boldsymbol{\alpha}$. Sometimes equality (4.26) is very important — see, for example, section 4.

4.2.4 The perturbation method on the set of orthogonal tensors

Turn-tensors are subjected to restrictions

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = +1. \quad (4.27)$$

A perturbed turn-tensor \mathbf{Q}_ε must be subjected to these conditions as well. In contrast, the turn-vector has no restrictions like (4.27). Thus the perturbed turn-vector can be simply defined as

$$\boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\theta}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (4.28)$$

where $\boldsymbol{\theta}_0$ is the unperturbed turn-vector and the vector $\boldsymbol{\varphi}$ is called the first variation of the turn-vector. The perturbed turn-tensor can be found from (4.3) and (4.4)

$$\mathbf{Q}_\varepsilon = \exp \mathbf{R}_\varepsilon = \exp (\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \mathbf{E}). \quad (4.29)$$

Equations (4.27) are then satisfied by the tensor \mathbf{Q}_ε for arbitrary vectors $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$. We shall consider the parameter ε as an independent variable. In such a case, it is possible to introduce the left and the right perturbation directions $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ and $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon$, respectively, analogously to the angular velocities:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{Q}_\varepsilon = \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \times \mathbf{Q}_\varepsilon = \mathbf{Q}_\varepsilon \times \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\eta}_\varepsilon = \mathbf{Q}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon. \quad (4.30)$$

The perturbed angular velocities can be found from the Poisson equations (4.9)

$$\dot{\mathbf{Q}}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega}_\varepsilon \times \mathbf{Q}_\varepsilon = \mathbf{Q}_\varepsilon \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{Q}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon. \quad (4.31)$$

The conditions of integrability for system (4.30), (4.31) can be written in the form

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \dot{\boldsymbol{\eta}}_\varepsilon + \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\omega}_\varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \dot{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon - \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon. \quad (4.32)$$

For the perturbation directions we have expressions analogous to Eqs. (4.19)

$$\boldsymbol{\eta}_\varepsilon = \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^{-T} \cdot \boldsymbol{\varphi}. \quad (4.33)$$

According to Eqs. (4.19), the perturbed angular velocities can be found by

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^{-T} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon.$$

If the unperturbed vector $\boldsymbol{\theta}_0$ does not depend on time (state of equilibrium), then

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{Z}_\varepsilon^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{Z}_\varepsilon^{-T} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (4.34)$$

Let there be given the function $f(\varepsilon, t)$. The quantity

$$f^*(t) = [\partial f(\varepsilon, t) / \partial \varepsilon]_{\varepsilon=0} \quad (4.35)$$

is called the first variation of the function $f(\varepsilon, t)$. For the first variation of the turn-tensor and of the perturbation directions we find from (4.30), (4.33), and (4.34)

$$\mathbf{Q}^* = \boldsymbol{\eta}_0 \times \mathbf{Q}_0, \quad \boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{Z}_0^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\omega}^* = \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 + \boldsymbol{\eta}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0, \quad (4.36)$$

where the subscript 0 marks the unperturbed state, $\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\eta}_\varepsilon |_{\varepsilon=0}$. For the right quantities analogous relations are valid

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}_0 \times \boldsymbol{\zeta}_0, \quad \boldsymbol{\zeta}_0 = \mathbf{Z}_0^{-T} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\Omega}^* = \dot{\boldsymbol{\zeta}}_0 - \boldsymbol{\zeta}_0 \times \boldsymbol{\Omega}_0. \quad (4.37)$$

Especially, if the perturbations are superposed on a state of equilibrium, these formulas may be simplified by $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{0}$. Using Eqs. (4.28), (4.34)-(4.37) the first variation of the modulus of the turn-vector may be found from $\theta_\varepsilon^2 = \boldsymbol{\theta}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\theta}_\varepsilon$:

$$\theta^* = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}_0. \quad (4.38)$$

4.3 The equations of motion of a rigid body oscillator

Let us consider a rigid body with a fixed point O . The body is supposed to be clamped on an elastic foundation, which is resisting to any turn of the body. The position of the body for an undeformed elastic foundation is chosen as reference position. The tensor of inertia of the body with respect to the fixed point O will be denoted as

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + A_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + A_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3, \quad (4.39)$$

where $A_i > 0$ are the principal moments of inertia and the vectors \mathbf{d}_i are the principal axes of the inertia tensor. Of course, the tensor \mathbf{A} can be represented in terms of an arbitrary basis \mathbf{e}_i

$$\mathbf{d}_i = \alpha_i^m \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{A} = A^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n, \quad A^{mn} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^m \alpha_i^n A_i.$$

If a body has the axis of symmetry \mathbf{k} , then the inertia tensor will be transversally isotropic

$$\mathbf{A} = A_1 (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + A_3 \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \quad \mathbf{d}_3 = \mathbf{k}, \quad A_1 = A_2. \quad (4.40)$$

The position of a body at the instant t is called the actual position of a body. The motion of the body can be defined either by the turn-tensor $\mathbf{P}(t)$ or by the turn-vector $\boldsymbol{\theta}(t)$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}(t)).$$

The tensor of inertia $\mathbf{A}^{(t)}$ in the actual position is determined by

$$\mathbf{A}^{(t)} = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T(t). \quad (4.41)$$

If the tensor \mathbf{A} is transversally isotropic, this results in

$$\mathbf{A}^{(t)} = A_1 (\mathbf{E} - \mathbf{k}' \otimes \mathbf{k}') + A_3 \mathbf{k}' \otimes \mathbf{k}', \quad \mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}. \quad (4.42)$$

The kinetic moment of the body can be expressed in two forms. In terms of the left angular velocity we obtain

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = A_1 \boldsymbol{\omega} + (A_3 - A_1) (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{k}', \quad (4.43)$$

where the second term of Eq. (4.43) applies to the transversally isotropic tensor of inertia only. In terms of the right angular velocity the kinetic moment has the form

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P} \cdot [A_1 \boldsymbol{\Omega} + (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k}]. \quad (4.44)$$

Let us note that

$$\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.45)$$

An external moment \mathbf{M} acting on the body can be represented in the form

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_{\text{ext}},$$

where \mathbf{M}_e is a reaction of the elastic foundation and \mathbf{M}_{ext} is an additional external moment. The elastic moment \mathbf{M}_e is supposed to be positional with a potential. In such a case, we may write according to (4.23)

$$\mathbf{M}_e = -\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.46)$$

where the scalar function $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ is called the elastic energy. In the following, the elastic foundation is supposed to be transversally isotropic. Then the elastic moment can be represented in form (4.25), i.e.

$$\mathbf{M}_e(\boldsymbol{\theta}) = -C(\boldsymbol{\theta}^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} - D(\boldsymbol{\theta}^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k}, \quad (4.47)$$

where the unit vector \mathbf{k} is placed on the axis of isotropy of the body in the reference position, and

$$C = 2 \frac{\partial}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)} \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}), \quad D = \frac{\partial}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}). \quad (4.48)$$

Let us consider a possible expression of an elastic energy, e.g.

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 c \boldsymbol{\theta}^2}{\alpha^2 - \boldsymbol{\theta}^2 + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta^2 (d - c) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2}{\beta^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2}, \quad (4.49)$$

where $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 > 0$, $c > 0$ and $d > 0$ are constant parameters. The parameters c and d are the bending stiffness and torsional stiffness of the elastic foundation, respectively. If the parameters α^2 and β^2 go to infinity, we obtain as simplest form of an elastic potential

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} c \left(\boldsymbol{\theta}^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 \right) + \frac{1}{2} d (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2. \quad (4.50)$$

In this case, the elastic moment (4.47) is

$$\mathbf{M}_e(\boldsymbol{\theta}) = -c \boldsymbol{\theta} - (d - c) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k}. \quad (4.51)$$

For an external moment \mathbf{M}_{ext} let us accept the expression

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = -\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{M}_{\text{ex}}, \quad (4.52)$$

where the first term describes the potential part of the external moment according to (4.23). The second law of dynamics by Euler can be represented in two equivalent forms. In terms of the left angular velocity we find from $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$

$$[\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\omega}]' + \mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d(\mathbf{U} + \mathbf{V})}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M}_{ex}. \quad (4.53)$$

This equation has to be completed by the left Poisson Eq. (4.15)

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (4.54)$$

resulting in a general model of a rigid body oscillator. In terms of the right angular velocity, the model can be represented by

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d(\mathbf{U} + \mathbf{V})}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{M}_{ex}, \quad (4.55)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad (4.56)$$

where Eqs. (4.13), (4.16), (4.44), (4.46), (4.52) and identities

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega})' = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega}), \quad \mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$$

have been used. It is important that the model of a rigid body oscillator is represented in terms of natural variables: the turn-vector and the vector of angular velocity. A significant merit of the equations stated above is that they contain the first derivatives of the unknown vectors only. Thus, it is possible to use standard methods for numerical analysis.

The remainder of the paper deals with applications of the derived equations.

4.4 Paradox by Nikolai

Let us consider a classical problem that was investigated by E.L.Nikolai [8]. Later it was studied by many other authors — see, for example [14], [2], where other references may be found.

The inertia tensor of the body is supposed to be transversally isotropic as defined by expression (4.40). An external follower moment is defined by

$$\mathbf{M}_{ext} = \mathbf{M}_{ex} = M\mathbf{k}' = M\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k}, \quad M = \text{const}, \quad (4.57)$$

where the unit vector \mathbf{k} is placed on the symmetry axis of the body in the reference position. The Eqs. (4.55) – (4.56) then read as

$$A_1 \dot{\mathbf{\Omega}} + (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{\Omega}}) \mathbf{k} - (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Omega}) \mathbf{k} \times \mathbf{\Omega} + \\ + C\boldsymbol{\theta} + D\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k} = M\mathbf{k}, \quad (4.58)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{\Omega}), \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}, \quad (4.59)$$

where the functions C and D are defined by expressions (4.48). It is easy to find the equilibrium solution of system of Eqs. (4.58) – (4.59)

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{k}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \text{const}, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{0}. \quad (4.60)$$

Substituting Eq. (4.60) into system (4.58) – (4.59), we obtain the equation

$$C(\theta^2, \theta) \boldsymbol{\theta} + D(\theta^2, \theta) = M. \quad (4.61)$$

Especially, if the elastic energy has form (4.50), then Eq. (4.61) takes a linear form

$$C(\theta^2, \theta) = c, \quad D(\theta^2, \theta) = (d - c) \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \implies \boldsymbol{\theta} = M\mathbf{k}/d. \quad (4.62)$$

In order to investigate the stability of solution (4.62), we will use a method of superposition of small perturbations on the state of equilibrium. Let us consider the perturbed quantities

$$\boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \theta_0 \mathbf{k} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}(t), \quad \mathbf{\Omega}_\varepsilon = \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t), \quad \theta_0 = M/d. \quad (4.63)$$

The perturbed Eqs. (4.58) – (4.59) take the form

$$A_1 \dot{\mathbf{\Omega}}_\varepsilon + (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{\Omega}}_\varepsilon) \mathbf{k} - (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Omega}_\varepsilon) \mathbf{k} \times \mathbf{\Omega}_\varepsilon + \\ + c\boldsymbol{\theta}_\varepsilon + (d - c) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \mathbf{k} = M\mathbf{k}, \quad (4.64)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon = \mathbf{\Omega}_\varepsilon + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \mathbf{\Omega}_\varepsilon + \frac{1-g_\varepsilon}{\theta_\varepsilon^2} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times (\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \mathbf{\Omega}_\varepsilon), \quad g_\varepsilon = \frac{\theta_\varepsilon \sin \theta_\varepsilon}{2(1 - \cos \theta_\varepsilon)}. \quad (4.65)$$

Substituting expressions (4.63) and taking into account the unperturbed solution yields

$$A_1 \dot{\boldsymbol{\eta}} + (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}) \mathbf{k} + c\boldsymbol{\varphi} + (d - c) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{k} + \\ + M \left(1 - \frac{c}{d} \right) \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varphi} + \frac{1-g}{\theta_0} (\boldsymbol{\varphi} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{k}) \right) = \mathbf{0}, \quad (4.66)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2} \frac{M}{d} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\eta} - (1 - g) (\boldsymbol{\eta} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta}) \mathbf{k}). \quad (4.67)$$

These equations may be decoupled in torsion and bending perturbations by

$$\boldsymbol{\eta} = \zeta \mathbf{k} + \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{k} = 0; \quad \boldsymbol{\varphi} = \gamma \mathbf{k} + \boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (4.68)$$

Substituting (4.68) into (4.66) – (4.67) and projecting obtained equations on \mathbf{k} and the plane orthogonal \mathbf{k} we have

$$\begin{aligned} A_3 \dot{\zeta} + d\gamma = 0, \quad A_1 \dot{\mathbf{y}} + [gc + (1 - g)d] \boldsymbol{\psi} + \frac{M}{2} \left(1 - \frac{c}{d}\right) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} = 0, \\ \dot{\gamma} = \zeta, \quad \boldsymbol{\psi} = g\mathbf{y} + \frac{M}{2d} \mathbf{k} \times \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Excluding from these equations ζ and \mathbf{y} we obtain

$$\begin{aligned} A_3 \ddot{\gamma} + d\gamma = 0, \\ A_1 \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \left(c \left(g^2 + \frac{M^2}{4d^2} \right) - \frac{M^2}{4d} + (1 - g)gd \right) \boldsymbol{\psi} + \frac{M}{2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} = 0, \end{aligned} \quad (4.69)$$

where

$$g = \frac{\theta_0 \sin \theta_0}{2(1 - \cos \theta_0)}, \quad \theta_0 = \frac{M}{d}.$$

If the quantity $|M|/d$ is small, i.e. $|M|/d \ll 1$, then the second Eq. (4.69) can be rewritten as

$$A_1 \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \left(c + \frac{(c - 2d)M^2}{12d^2} \right) \boldsymbol{\psi} + \frac{M}{2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} = 0. \quad (4.70)$$

Taking into account that $\boldsymbol{\psi}$ is orthogonal \mathbf{k} let us look for a particular solution of this equation in the form

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{a} \exp(pt), \quad \mathbf{a} = \text{const}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

For the vector \mathbf{a} we have the system

$$\left(\left(A_1 p^2 + c + \frac{(c - 2d)M^2}{12d^2} \right) \mathbf{E}_* + \frac{M}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_* \right) \cdot \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{E}_* = \mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}. \quad (4.71)$$

This equation has the form

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\psi} = 0, \quad \mathbf{A} = \lambda \mathbf{E}_* + \mu \mathbf{k} \times \mathbf{E}_*, \quad \mathbf{E}_* = \mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{k} = 0,$$

where

$$\lambda = A_1 p^2 + c + \frac{(c - 2d)M^2}{12d^2}, \quad \mu = \frac{M}{2}.$$

We see that

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \det \mathbf{A} = 0.$$

In such a case, only the determinant of the plane part of \mathbf{A} is important. It can be defined by

$$\text{Det}\mathbf{A} = \frac{1}{2} \left((\text{tr}\mathbf{A})^2 - \text{tr}\mathbf{A}^2 \right) = \frac{1}{2} (4\lambda^2 - 2\lambda^2 + \mu^2) = \lambda^2 + \mu^2.$$

Thus, nontrivial solutions of Eq. (4.71) are obtained for

$$\left(A_1 p^2 + c + \frac{(c - 2d) M^2}{12d^2} \right)^2 + \frac{M^2}{4} = 0. \quad (4.72)$$

It is easy to see that at least one root of this equation has a positive real part resulting in an increasing solution of Eq. (4.70) since a total solution of (4.70) has a form

$$\boldsymbol{\psi} = \sum_{k=1}^4 \mathbf{a}_k \exp(p_k t), \quad \mathbf{a}_k = \text{const}, \quad \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{k} = 0,$$

where p_k are the roots of (4.72), \mathbf{a}_k are the solutions of (4.71). Thus, the state of equilibrium (4.62) is unstable for an arbitrarily small external twisting moment M . This phenomenon is well known under the name of paradox of Nikolai.

From the pure theoretical point of view it is no wonder that the state of equilibrium is unstable. However, from the practical point of view the situation is very disagreeable. Really, if an external moment is small, then it is supposed that the linear theory is valid. In this case, Eqs. (4.58) – (4.59) can be rewritten as

$$A_1 \ddot{\boldsymbol{\theta}} + (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{k} + c \boldsymbol{\theta} + (d - c) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k} = M \mathbf{k}. \quad (4.73)$$

Using a decomposition $\boldsymbol{\theta} = \gamma \mathbf{k} + \boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k} = 0$ this equation may be written as

$$A_3 \ddot{\gamma} + d\gamma = M, \quad A_1 \ddot{\boldsymbol{\psi}} + c\boldsymbol{\psi} = 0. \quad (4.74)$$

The solution of this system has a small norm if the moment M and the norm of initial conditions are small. Namely this is done in most of investigations and there was no doubt that such an approach is quite accurate. However, as shown above, if we take into account second order quantities, then the solution will be unstable. Is it really so? It is a well-known fact [7] that the equations in terms of variations may give a faulty result in some cases. In such doubtful cases the nonlinear analysis has to be used.

4.5 Rigorous justification of the Nikolai paradox

Let us consider an external moment of the kind

$$\mathbf{M}_{\text{ex}} = \gamma M (l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}), \quad \gamma = (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k})^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.75)$$

If $l_1 = 1, l_2 = 0$, then \mathbf{M}_{ex} is a dead moment; if $l_1 = 0, l_2 = 1$, then \mathbf{M}_{ex} is a followed (tangential) moment; if $l_1 = l_2 = 1$, then \mathbf{M}_{ex} is a semi-tangential moment. For the elastic moment let us accept expression (4.47) where $C(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})$ and $D(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})$ are functions of a general kind. The tensor of inertia is supposed to be transversally isotropic with \mathbf{k} as axis of symmetry.

Using expressions (4.43) and (4.44) for the kinetic moment, the equations may be derived either in form (4.53) or (4.55):

$$[A_1 \boldsymbol{\omega} + (A_3 - A_1) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}') \mathbf{k}']' + C\boldsymbol{\theta} + D\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k} = \gamma M (l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{k}'), \quad (4.76)$$

$$[A_1 \boldsymbol{\Omega} + (A_3 - A_1) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}]' + (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k} + C\boldsymbol{\theta} + D\mathbf{Z} \cdot \mathbf{k} = \gamma M (l_1 \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{k} + l_2 \mathbf{k}), \quad (4.77)$$

where $\mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}$. Although Eqs. (4.76) – (4.77) are equivalent, a nontrivial result can be found from a comparison. Subtracting Eq. (4.77) from Eq. (4.76) and taking into account $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}' = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}$ yields

$$[A_1 (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) + (A_3 - A_1) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{k}' - \mathbf{k})]' + (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega} + D\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} = \gamma M [(l_1 - l_2) \mathbf{k} + l_2 \mathbf{k}' - l_1 \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{k}].$$

By multiplying this equation by the vector \mathbf{k} , we obtain

$$[A_1 (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{k} + (A_1 - A_3) \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} (1 - \cos \vartheta)]' = \gamma M (l_1 - l_2) (1 - \cos \vartheta), \quad (4.78)$$

where $\cos \vartheta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}$. Let us note that Eq. (4.78) does not contain the characteristics of the elastic foundation.

Equation (4.78) can be rewritten in another form. From Eqs. (4.19) – (4.20) follows

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Z}^{-T}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = 2 \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.79)$$

The turn-vector $\boldsymbol{\theta}$ can be represented as a composition

$$\boldsymbol{\theta} = x\mathbf{k} + \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \theta^2 = x^2 + y^2, \quad \mathbf{y} = y(t) \mathbf{Q}(\psi(t) \mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}, \quad (4.80)$$

where

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad |\mathbf{m}| = 1.$$

One can prove the formulas

$$\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}}) = \dot{\psi} y^2, \quad 1 - \cos \vartheta = \frac{y^2 (1 - \cos \theta)}{\theta^2}. \quad (4.81)$$

Taking into account relations (4.79), (4.80) and (4.81), Eq. (4.78) can be rewritten as

$$[(1 - \cos \vartheta) F]' = \gamma M (l_1 - l_2) (1 - \cos \vartheta), \quad F \equiv 2A_1 \dot{\psi} + (A_1 - A_3) \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.82)$$

Equality (4.82) was derived in another way and was shown to the author in a private talk by Dr. A. Krivtsov. In fact, equality (4.82) is due to the existence of property (4.26) for the elastic moment. Let us note that the right side of Eq. (4.82) has a constant sign which is defined by the sign of $M (l_1 - l_2)$. Let us suppose that $M (l_1 - l_2) > 0$. In such a case, let us choose the initial conditions in such a way that $F|_{t=0} > 0$. Then equality (4.82) shows to us that the function $F(t)$ tends to infinity as $t \rightarrow \infty$ which is equivalent to an infinitely big velocity of precession $\dot{\psi}$, i.e. the state of equilibrium (4.62) is unstable for an arbitrarily small value of twisting moment and for any transversally isotropic elastic foundation. Therefore, the analysis on the base of the equations in terms of variations gives the right result. The Nikolai paradox is due to an accumulation of energy in the system.

4.6 The simplest rigid body oscillator

Let us consider the simplest case of the rigid body oscillator given by

$$\mathbf{A} = A\mathbf{E}, \quad \mathbf{U} = u(\theta^2), \quad \frac{d}{d\theta} \mathbf{U} = 2 \frac{du(\theta^2)}{d(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} = c(\theta^2) \boldsymbol{\theta}. \quad (4.83)$$

Further, let us introduce a friction moment

$$\mathbf{M}_{\text{ex}} = -b\boldsymbol{\omega}, \quad b = \text{const} \geq 0. \quad (4.84)$$

In such a case, basic Eqs. (4.55) – (4.56) yield

$$A\dot{\boldsymbol{\Omega}} + b\boldsymbol{\Omega} + c(\theta^2) \boldsymbol{\theta} = 0, \quad (4.85)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}. \quad (4.86)$$

It is seen that even in this simplest case the equations of motion are rather complicated. For the plane oscillations this system can be simplified

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} = 0$$

satisfying Eq. (4.86). Equation (4.85) then simplifies to

$$A\boldsymbol{\theta}'' + b\dot{\boldsymbol{\theta}} + c(\theta^2) \boldsymbol{\theta} = 0; \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \boldsymbol{\Omega}(0) = \boldsymbol{\Omega}_0, \quad \boldsymbol{\theta}_0 \times \boldsymbol{\Omega}_0 = 0. \quad (4.87)$$

This system can be investigated without any problems. Let us discuss system of Eqs. (4.85) – (4.86) in a more general case. In order to show the difference between conventional approaches and our method, let us consider both of them.

4.6.1 Conventional approach

Let us try to investigate system (4.85), (4.86) on the basis of the Euler angles. The turn-tensor can be represented [10] in the form

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\theta) &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) = \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}') \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) = \\ &= \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}') \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (4.88)$$

where

$$\beta = \varphi + \psi, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}' = 0. \quad (4.89)$$

The left angular velocity is determined by [10]

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) \mathbf{k} + \dot{\vartheta} \mathbf{p}' + \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{p}' \times \mathbf{k}. \quad (4.90)$$

Making use of expressions (4.7), (4.88), (4.90) and substituting them into Eq. (4.93) yields

$$\begin{aligned} A (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)' + b (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) + \frac{c (\theta^2) \theta}{2 \sin \theta} \sin \beta (1 + \cos \vartheta) &= 0, \\ A (\ddot{\vartheta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \vartheta) + b \dot{\vartheta} + \frac{c (\theta^2) \theta}{2 \sin \theta} \sin \vartheta (1 + \cos \beta) &= 0, \\ A ((\dot{\varphi} \sin \vartheta)' - \dot{\psi} \dot{\vartheta}) + b \dot{\varphi} \sin \vartheta + \frac{c (\theta^2) \theta}{2 \sin \theta} \sin \beta \sin \vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (4.91)$$

In addition to this system we obtain from (4.6) and (4.89)

$$1 + 2 \cos \theta = \cos \vartheta + \cos \beta + \cos \vartheta \cos \beta, \quad \beta = \varphi + \psi. \quad (4.92)$$

It is not so easy to find the total solution of Eqs. (4.91). Let us note that representation (4.88) is completely admissible. However, there are many other possibilities and the most of them will lead to complicated equations. If we want to find the best representation, then we have to look for this representation during solution process rather than to guess it a priori [10].

4.6.2 The total integrability of the basic equations

Multiplying Eq. (4.85) by the tensor $\mathbf{P}(\theta)$ from the left, one can obtain

$$A \dot{\boldsymbol{\omega}} + b \boldsymbol{\omega} + c (\theta^2) \boldsymbol{\theta} = 0, \quad (4.93)$$

where the identity

$$\mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} = (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega})' - \dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}} - (\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

was taken into account. Equation (4.93) is equivalent to Eq. (4.85). However, from (4.85) and (4.93) a nontrivial result may be obtained

$$A (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})' + b (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) = 0 \implies \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) \exp\left(-\frac{bt}{A}\right), \quad (4.94)$$

where $\boldsymbol{\omega}_0$ and $\boldsymbol{\Omega}_0$ are the initial angular velocities. Expression (4.94) gives to us three integrals. Now it is necessary to consider two cases:

$$\text{a) } \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0 = 0, \quad \text{b) } \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0 = |\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0| \mathbf{e} \neq 0.$$

In the first case we deal with plane vibrations of the oscillator. Really, in the first case from (4.94) it follows that

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \implies \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\theta} = 0.$$

The latter fact follows from (4.15) and (4.16). This is identical to the case of Eq. (4.87).

It is more interesting to investigate case b). From Eqs. (4.17) – (4.18) we find

$$g(\theta) (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}).$$

Taking into account integral (4.94) one can get

$$g(\theta) \exp\left(-\frac{bt}{A}\right) (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}).$$

Further, we may derive from (4.19) and (4.20) the identity

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

which change the above relation to

$$\frac{2(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) \exp\left(-\frac{bt}{A}\right). \quad (4.95)$$

From this equation, one more integral follows

$$\boldsymbol{\theta}(t) \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) = 0 \implies \boldsymbol{\theta}(t) \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (4.96)$$

where $\mathbf{e} = (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) / |\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0|$. This equation shows that the turn-vector $\boldsymbol{\theta}(t)$ can be represented as

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \theta(t) \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \boldsymbol{\theta}_0 / \theta_0, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \psi(0) = 0. \quad (4.97)$$

From this representation we can conclude

$$\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\psi} \theta^2 \mathbf{e}. \quad (4.98)$$

Substituting this expression in (4.95) and taking into account the resulting equation for $t = 0$ yields

$$\dot{\psi} = \frac{1 - \cos \theta_0}{1 - \cos \theta(t)} \dot{\psi}_0 \exp\left(-\frac{bt}{A}\right), \quad \dot{\psi}_0 > 0. \quad (4.99)$$

Thus, if we know the angle of nutation $\theta(t)$ then the angle of precession can be found from (4.99). Let us derive an equation for the angle θ . For this end let us calculate the right angular velocity from (4.19) – (4.20) and (4.97)

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\dot{\theta}}{\theta} \boldsymbol{\theta} + \frac{\sin \theta}{\theta} \dot{\psi} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta} - (1 - \cos \theta) \dot{\psi} \mathbf{e}. \quad (4.100)$$

Substituting expression (4.100) into Eq. (4.85) and projecting the obtained equation onto the vectors $\boldsymbol{\theta}$, \mathbf{e} and $\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}$, respectively, we get three scalar equations where two of them (projections on \mathbf{e} and $\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}$) will be identically fulfilled due to (4.99). Projection onto the vector $\boldsymbol{\theta}$ gives

$$A\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \left[c(\theta^2) - A \frac{\sin \theta}{\theta} \left(\frac{1 - \cos \theta_0}{1 - \cos \theta} \right)^2 (\dot{\psi}_0)^2 \exp\left(-\frac{2bt}{A}\right) \right] \theta = 0. \quad (4.101)$$

If the friction is absent ($b = 0$), then this equation can be solved in terms of quadratures. The plane motions of the oscillator can be found from Eq. (4.101) when $\dot{\psi}_0 = 0$. In a general case, Eq. (4.101) can be studied by conventional methods of nonlinear mechanics. Let us note that even for small θ Eq. (4.101) is nonlinear

$$A\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \left[c(0) - A \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^4 \dot{\psi}_0^2 \exp\left(-\frac{2bt}{A}\right) \right] \theta = 0. \quad (4.102)$$

In contrast with it, the system of Eqs. (4.85) – (4.86) can be linearized for small turns, i.e. for $|\theta| \ll 1$, and we obtain the linear equation

$$A\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c(0) \theta = 0. \quad (4.103)$$

Let us show that the nonlinear Eq. (4.102) follows from Eq. (4.103) if one takes into account $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$. If the turn-vector is represented as $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{n}$, $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$, $|\mathbf{n}| = 1$, then we have

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\theta} \mathbf{n} + \theta \dot{\mathbf{n}}, \quad \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \ddot{\theta} \mathbf{n} + 2\dot{\theta} \dot{\mathbf{n}} + \theta \ddot{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0, \quad \ddot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = -\dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}}. \quad (4.104)$$

Substituting (4.104) into (4.103) gives

$$(A\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c\theta) \mathbf{n} + (2A\dot{\theta} + b\theta) \dot{\mathbf{n}} + A\theta\ddot{\mathbf{n}} = 0.$$

Multiplying this equation by \mathbf{n} and $\dot{\mathbf{n}}$ we obtain

$$A\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + (c - A\chi)\theta = 0, \quad \frac{1}{2}A\theta\dot{\chi} + (2A\dot{\theta} + b\theta)\chi = 0, \quad \chi = \dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}}. \quad (4.105)$$

From the second equation of this system it follows

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} + 4\frac{\dot{\theta}}{\theta} + 2\frac{b}{A} = 0 \Rightarrow \chi\theta^4 = x_0\theta_0^4 \exp\left(-\frac{2bt}{A}\right), \quad \chi(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0.$$

Substituting this expression for χ into the first Eq. (4.103) we obtain (4.102). Therefore, the solution of linear Eq. (4.103) determines the exact solution of nonlinear Eq. (4.102). In many other cases we have the same situation.

If friction is absent ($b = 0$), then Eq. (4.101) has an exact solution

$$\theta = \theta_0 = \text{const}, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \text{const}, \quad (\dot{\psi})^2 = \frac{c(\theta_0^2)\theta_0}{A \sin \theta_0}. \quad (4.106)$$

This solution is called regular precession which will be considered in the next section. If the friction is present, then for the large times Eq. (4.101) transforms to Eq. (4.87).

4.6.3 Comparison of two approaches

Let us compare the two approaches described. The first approach is defined by representation (4.88) of the turn-tensor where \mathbf{k} and \mathbf{p} are arbitrary orthogonal unit vectors. For the angles ψ, ϑ, φ and the velocities $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ we may provide arbitrary initial conditions if and only if we are able to find a general solution of Eqs. (4.91). It is not known, if this is possible.

In the second approach, the representation of the turn-tensor has a special form

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}[\theta\mathbf{Q}(\psi\mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}] = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\theta\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi\mathbf{e}) \quad (4.107)$$

due to Eq. (4.97) for the turn-vector. The unit vectors \mathbf{e} and \mathbf{m} are very special and found in the solution process. The two angles θ and ψ can describe only the special solution we were looking for, and which is contained in the first approach. In order to see this, let us accept the relation $\varphi = -\psi$, i.e. $\beta = 0$, in representation (4.88) resulting in $\vartheta = \theta$. In such a case, system (4.91) – (4.92) reduces to

$$A(\dot{\psi}(1 - \cos \theta))' + b\dot{\psi}(1 - \cos \theta) = 0,$$

$$A (\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin \theta) + b\dot{\theta} + c (\theta^2) \theta = 0,$$

$$A \left((\dot{\psi} \sin \theta)' + \dot{\psi} \dot{\theta} \right) + b\dot{\psi} \sin \theta = 0.$$

The first equation of this system gives to us integral (4.99). The third equation is an identity, if we take into account the first equation. At last, the second equation coincides with Eq. (4.101). Thus, the system (4.91) has a particular solution coinciding with the solution found above. However, when using representation (4.88) this solution does not allow to satisfy all initial conditions since the vectors \mathbf{k} and \mathbf{p} have preassigned directions and $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}$.

4.7 The regular precession of the rigid body oscillator

Let us consider a body with a transversally isotropic tensor of inertia. The elastic foundation is supposed to be transversally isotropic as well. The equations of motion are given by expressions (4.53), (4.54) and expression (4.47) for the elastic moment

$$[A_1 \boldsymbol{\omega} + (A_3 - A_1) (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{k}']' + C\boldsymbol{\theta} + D\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}; \quad (4.108)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}), \quad (4.109)$$

where the functions C and D are defined by (4.48). We assume a particular solution of system (4.108), (4.109) to be represented in the form

$$\boldsymbol{\theta} = \vartheta \mathbf{p}', \quad \mathbf{p}' = \mathbf{Q} (\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q} (\vartheta \mathbf{p}'), \quad (4.110)$$

where the motion (4.110) is called a regular precession if

$$\vartheta = \text{const}, \quad \dot{\psi} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}. \quad (4.111)$$

The left angular velocity then follows from (4.19) and is given as

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q} (\psi \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\psi} [(1 - \cos \vartheta) \mathbf{k} + \sin \vartheta \mathbf{k} \times \mathbf{p}] = \text{const}. \quad (4.112)$$

We see that the angular velocity vector $\boldsymbol{\omega}$ is a precession of the vector $\boldsymbol{\omega}_0$ around the axis \mathbf{k} orthogonal to the turn-vector

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0.$$

In addition, let us accept the restriction

$$D (\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) |_{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0} = \frac{\partial}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} U (\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) |_{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0} = 0,$$

which is satisfied for most kinds of elastic energy. Then we obtain from Eq. (4.108) for the assumed solution

$$\dot{\psi}^2 = \frac{C(\vartheta^2, 0) \vartheta}{\sin \vartheta [A_3 (1 - \cos \vartheta) + A_1 \cos \vartheta]}. \quad (4.113)$$

Especially, if $A_1 = A_3 = A$, we find solution (4.106).

Now we have to investigate the stability of solution (4.110) – (4.113). In general, it is a rather cumbersome process. In order to simplify it, let us accept

$$A = A_1 = A_3, \quad D(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = 0, \quad C(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = c = \text{const.} \quad (4.114)$$

This means that the tensor of inertia and the elastic foundation are supposed to be isotropic. Under these assumptions the perturbed equations of motion (4.108) – (4.109) take the form

$$A \dot{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon + c \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega}_\varepsilon - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\omega}_\varepsilon + \frac{1 - g_\varepsilon}{\theta_\varepsilon^2} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times (\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\omega}_\varepsilon). \quad (4.115)$$

The perturbed quantities $\boldsymbol{\omega}_\varepsilon$ and $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$ could be represented by

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega} + \varepsilon \boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\theta} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (4.116)$$

where $\boldsymbol{\omega}$ and $\boldsymbol{\theta}$ are defined by (4.110) – (4.113). Such a choice, however, would yield equations for $\boldsymbol{\eta}$ and $\boldsymbol{\varphi}$ with varying coefficients. Therefore, it will be better to represent the functions $\boldsymbol{\omega}_\varepsilon$ and $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$ by

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\vartheta \mathbf{p} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}), \quad (4.117)$$

where the function ψ is defined by (4.113). It is easy to calculate

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \varepsilon (\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\eta})),$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\dot{\psi} \vartheta \mathbf{k} \times \mathbf{p} + \varepsilon (\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varphi})).$$

Taking into account these expressions, notation (4.35) and Eqs. (4.115) we have

$$A (\dot{\boldsymbol{\omega}})^* + c \boldsymbol{\theta}^* = \mathbf{0}, \quad (\dot{\boldsymbol{\omega}})^* = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\theta}^* = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varphi},$$

$$\begin{aligned} (\dot{\boldsymbol{\theta}})^* = \boldsymbol{\omega}^* - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}^* \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}^*) + \left(\frac{1 - g}{\theta^2} \right)^* [\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega})] + \\ + \left(\frac{1 - g}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega})]^*, \end{aligned} \quad (4.118)$$

where the vectors $\boldsymbol{\theta}$ and $\boldsymbol{\omega}$ are defined by (4.110) and (4.112) respectively. Further, for any orthogonal tensor \mathbf{Q} and any pair of vectors \mathbf{a} and \mathbf{b} there exists an identity

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \det \mathbf{Q} = 1.$$

Using this identity, we have from Eqs. (4.118) the following equations for the variations $\boldsymbol{\eta}$ and $\boldsymbol{\varphi}$

$$\mathbf{A} (\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\eta}) + c \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varphi} = & \frac{\vartheta \sin \vartheta}{2(1 - \cos \vartheta)} \boldsymbol{\eta} - \frac{\vartheta - \sin \vartheta}{2(1 - \cos \vartheta)} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\omega}_0 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_0 - \\ & - \frac{1}{2} \vartheta \mathbf{p} \times \boldsymbol{\eta} + \frac{2(1 - \cos \vartheta) - \vartheta \sin \vartheta}{2\vartheta(1 - \cos \vartheta)} (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 + \vartheta \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta}) \mathbf{p}, \end{aligned}$$

where $\dot{\psi}$ is determined by (4.113) and $\vartheta = \text{const}$. This system of linear differential equations with constant coefficients can be further investigated by conventional methods. Our aim was only to show the derivation of the equations in terms of variations.

4.8 Conclusion

We have presented a general model of a rigid body oscillator given in terms of Eqs. (4.53) – (4.54) or Eqs. (4.55) – (4.56), respectively. Using the notation of a turn-vector for describing rotations of rigid bodies we could introduce the integrating tensor $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ and a potential moment $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$. In order to study the properties of a rigid body oscillator, we may accept $\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$. In such a case, Eqs. (4.55) – (4.56) take the form

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}, \quad (4.119)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}). \quad (4.120)$$

In this form, the rigid body oscillator has many applications to important technical problems. Especially, it will be useful for investigations of the microscale phenomena on the basis of principles of classical mechanics. For example, in [12] the well-known Klein-Gordon and Schrödinger equations could be derived from an application of this model to the media by Lord Kelvin.

A Appendix. Notation and terminology

In the paper, the direct tensor calculus is used. This approach is introduced by J. Gibbs and may be found in the books [3], [5], [6], and in many modern books on

differential geometry and linear algebra. The direct tensor calculus is widely used in continuum mechanics — see [6], [9]. In order to develop multipolar continuum mechanics, it is necessary to use the methods of rigid body dynamics. This is a sufficient reason to describe the rigid body dynamics in terms of the direct tensor calculus. For readers more familiar with matrices notations, the following analogies hold

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{a}^T \mathbf{n}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{n} \Leftrightarrow \underline{\tilde{\mathbf{a}}}\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{n}\mathbf{n}^T,$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{n} \triangleq \begin{vmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

These analogies are valid if we choose some orthonormal basis. However, the left sides are valid in any basis while the right sides depend on a choice of the basis.

Now we have to discuss the terminology. In the paper, we use the terms “turn-vector” and “turn-tensor” instead of the conventional terms “rotation vector” and “rotation tensor”, respectively. For this, an explanation may be given. A rotation is a process, a turn is an instant action. The turn-tensor is turning a body from the reference position to the actual position at each moment of time. The same can be said with respect to a turn-vector. In contrast with this, the vector $\boldsymbol{\omega} dt \neq d\boldsymbol{\theta}$ is rotating a body from the position at a moment of time t to the body position at the moment of time $t + dt$. Really, let \mathbf{d}_k be a triplet of vectors fixed with respect to the body in the reference position and $\mathbf{D}_k(t)$ is the triplet \mathbf{d}_k turned to the actual position. Then we have

$$\mathbf{D}_k(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{D}_k(t + dt) = \mathbf{P}(t + dt) \cdot \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{d}_k = \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{D}_k(t).$$

From this follows

$$\mathbf{D}_k(t + dt) = \mathbf{P}(t + dt) \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{D}_k(t) = (\mathbf{P}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) dt) \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{D}_k(t).$$

Making use of the Poisson Eq. (4.9) we obtain

$$\mathbf{D}_k(t + dt) = \mathbf{D}_k(t) + \boldsymbol{\omega}(t) dt \times \mathbf{D}_k(t).$$

Thus, namely the vector $\boldsymbol{\omega} dt$ rotates the triplet $\mathbf{D}_k(t)$ into the triplet $\mathbf{D}_k(t + dt)$ rather than the vector $d\boldsymbol{\theta}$. The infinitely small vector $\delta\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\omega} dt$ may be named the rotation vector. Of course, we are not sure that we select the best terms. However, it is important that we need two different terms for a rotation, since a body is rotating around one axis and at the same time the body is turned around an another axis. The axis of rotation is the line spanned by the vector of the left angular velocity while the axis of turn is the line spanned by the turn-vector. For a regular precession, these two axes are orthogonal — see section 7.

B Appendix. The representation for the integrating tensor

The representation for the integrating tensor may be obtained by many approaches and all of them are rather long. From our point of view, the shortest way is given below.

Calculating the trace from both sides of the Poisson Eq. (4.9), one can obtain

$$(\text{tr } \mathbf{Q})' = \text{tr } \dot{\mathbf{Q}} = \text{tr } (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}) = -2 \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \text{tr } (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Taking into account the equality

$$\text{tr } \mathbf{Q} = 1 + 2 \cos \theta,$$

from the previous equation it is easy to derive

$$\theta \dot{\theta} = \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (4.121)$$

Multiplying Eq. (4.9) by the vector $\boldsymbol{\theta}$, one can get

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta} = -\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Making use of the identity

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\theta})' - \mathbf{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = -(\mathbf{Q} - \mathbf{E}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

and Eq. (4.3), the previous equation can be rewritten as

$$\left(\frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{R} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R}^2 \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

A general solution of this equation has the form

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\theta} + \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.122)$$

where the scalar function λ must be found. Multiplying Eq. (4.122) by $\boldsymbol{\theta}$ and taking into account equality (4.121) yields

$$\lambda = \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

Then Eq. (4.122) takes a form

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2 \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.123)$$

where we use the identity

$$\mathbf{R}^2 = \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} - \theta^2 \mathbf{E}.$$

Expression (4.123) gives to us representation (4.20). Thus we had found the tensor \mathbf{Z}^{-1} . Since the tensor \mathbf{Z}^{-1} is an isotropic function of the tensor \mathbf{R} , we conclude that tensor \mathbf{Z} is the isotropic tensor function of the tensor \mathbf{R} as well

$$\mathbf{Z} = \alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{R} + \gamma \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{E}.$$

From this it follows

$$\alpha = 1, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1-g}{\theta^2}, \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)},$$

which is expression (4.11).

C Appendix. Elastic energy of foundation

In the section 4.3, there was given the definition of an elastic energy in terms of a potential function $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})$. This function was interpreted as elastic energy of the foundation. However, in the nonlinear theory of elasticity the concept of elastic energy has a uniquely determined meaning. Thus, it is necessary to show that there is no contradiction between these two concepts.

The foundation is supposed to be an elastic body. The boundary of the foundation is the surface $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, where the part S_1 of the surface S is fixed, the part S_2 is a free surface, and the part S_3 is the contact surface between the foundation and the rigid body. Let us formulate the energy balance for the system “foundation plus rigid body”

$$\dot{K} + \dot{U} = 0. \quad (4.124)$$

The function K is only the kinetic energy of the rigid body, since the foundation is supposed to be without inertia. U is the total intrinsic energy, i.e. elastic energy or energy of deformation which is confined to the elastic foundation, since the intrinsic energy of the rigid body has a constant value. The right side of (4.124) is equal to zero because the power of external forces is absent.

Now let us write the equation of energy balance for the rigid body only. The external forces acting on the body are generating stresses acting on the part S_3 of the boundary. Thus, we can write

$$\dot{K} = - \int_{P \in S_3} \mathbf{N}(P) \cdot \boldsymbol{\tau}(P) \cdot \dot{\mathbf{R}}(P) dS(P), \quad (4.125)$$

where $\mathbf{R}(P)$ is the position vector of a contact point P on surface S_3 , the vector \mathbf{N} is an external unit normal to the surface S_3 , and the tensor $\boldsymbol{\tau}$ is the Cauchy stress tensor.

According to the kinematics of a rigid body, we have

$$\mathbf{R}(P) = \mathbf{R}(Q) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}(P) - \mathbf{r}(Q)), \quad (4.126)$$

where Q is a reference point, $\mathbf{r}(P)$ and $\mathbf{r}(Q)$ are the position vectors of points P and Q in the reference position. From Eq. (4.126) follows

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(Q) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{R}(P) - \mathbf{R}(Q)]. \quad (4.127)$$

Substituting $\dot{\mathbf{R}}(P) = \mathbf{v}(P)$ in Eq. (4.127) by (4.125) we obtain

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(Q) + \mathbf{M}_e \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (4.128)$$

where

$$\mathbf{F} = - \int_{P \in S_3} \mathbf{N}(P) \cdot \boldsymbol{\tau}(P) dS(P),$$

$$\mathbf{M}_e = - \int_{P \in S_3} [\mathbf{R}(P) - \mathbf{R}(Q)] \times \boldsymbol{\tau}(P) \cdot \mathbf{N}(P) dS(P).$$

Making use of (4.124), Eq. (4.128) can be rewritten as

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(Q) + \mathbf{M}_e \cdot \boldsymbol{\omega} = -\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{R}(Q), \boldsymbol{\theta}), \quad (4.129)$$

where the vector $\boldsymbol{\theta}$ is the turn-vector of the rigid body and henceforth of the surface S_3 . If the point Q is fixed, we have definition (4.21). Thus, the potential \mathbf{U} in expression (4.46) is an elastic energy of the foundation.

D Appendix. Transversally isotropic potential

Let there be given a scalar function $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ of a vector argument. This function is called transversally isotropic with the symmetry axis \mathbf{k} if for any turn-tensor $\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k})$ the equality

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{U}[\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\theta}] \quad (4.130)$$

is valid. Let us consider a continuous set of tensors $\mathbf{Q}(\alpha(\tau)\mathbf{k})$. For any of them Eq. (4.130) must be valid. Note that the left side of (4.130) is independent of τ . Thus, we have

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{U}(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{U}}{d\boldsymbol{\theta}'} \cdot \frac{d}{d\tau} \boldsymbol{\theta}' = 0, \quad \boldsymbol{\theta}' = \mathbf{Q}(\alpha(\tau)\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\theta}. \quad (4.131)$$

Making use of the Poisson Eq. (4.9) we obtain

$$\frac{d}{d\tau}\theta' = \frac{d\alpha}{d\tau}\mathbf{k} \times \theta'.$$

Substituting this expression into (4.131) and accepting

$$\alpha(0) = 0, \quad [d\alpha(\tau)/d\tau]_{\tau=0} \neq 0$$

we have

$$\frac{dU}{d\theta} \cdot (\mathbf{k} \times \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{d\theta} = \varphi\mathbf{k} + \psi\theta, \quad (4.132)$$

where φ and ψ are some scalar functions. Multiplying this equation by the vector $d\theta$ yields

$$dU = \frac{dU}{d\theta} \cdot d\theta = \varphi d(\mathbf{k} \cdot \theta) + \frac{1}{2}\psi d(\theta^2).$$

From this expression we see that a general form of a transversally isotropic potential may be represented as

$$U(\theta) = F(\mathbf{k} \cdot \theta, \theta^2).$$

This is expression (4.24).

References

- [1] **Argyris J.** An excursion into large rotations// Computer Methods in Appl. Mech. and Engineering. 1982. Vol. 32. P. 85 – 155.
- [2] **Bolotin V.V.** Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability/ Pergamon Press. Oxford – London – New York – Paris, 1963.
- [3] **Lagally M.** Vorlesungen über Vektor-Rechnung/ Akad. Verlagsgesellschaft M.B.H. Leipzig, 1928.
- [4] **Lorentz H.A.** Aether Theories and Aether Models. NTI, Moskow – Leningrad: NTI, 1936. (in Russian).
- [5] **Lurie A.I.** Analytical Mechanics. GIFML. Moscow, 1961. (in Russian).
- [6] **Lurie, A.I.** Nonlinear Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1980. (in Russian).
- [7] **Merkin D.R.** Introduction to the Theory of Stability of Motion. Moscow: Nauka, 1987. (in Russian).

- [8] **Nikolai E.L.** Transactions on Mechanics. GITTL. Moscow, 1955. (in Russian).
- [9] **Truesdell C.** A First Course in Rational Continuum Mechanics. MIR. Moscow, 1975. (in Russian).
- [10] **Zhilin P.A.** A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies/ ZAMM. 76 (1996) 4. P. 187 – 204.
- [11] **Zhilin P.A.** Dynamics and Stability of Equilibrium States of Rigid Body on a Nonlinear Elastic Foundation// Proc. of the XXIV Summer School “Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems”. St. Petersburg, 1997. P. 90 – 122. (in Russian).
- [12] **Zhilin P.A.** Reality and Mechanics// Proc. of the XXIII Summer School “Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems”. St. Petersburg, 1996. P. 6 – 49. (in Russian).
- [13] **Zhuravlev V.F.** Foundations of Theoretical Mechanics. Moscow: Nauka, 1997. (in Russian).
- [14] **Ziegler H.** Principles of Structural Stability/ Blaisdell Publ. Comp. Waltham – Massachusetts – Toronto – London, 1968.

Жилин Павел Андреевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Корректор *О. В. Махрова*

Технический редактор *А. И. Колодяжная*

Оригинал-макет подготовлен автором

Директор Издательства СПбГТУ *А. В. Иванов*

Свод. темплан 2001 г.

Лицензия ЛР № 020583 от 07.08.97

Подписано в печать

Формат 60x84/16.

Печать офсетная. Усл. печ. л.

Уч.-изд. л. Тираж

Заказ

С146

Санкт-Петербургский государственный технический университет.
Издательство СПбГТУ, член Издательско-полиграфической ассоциации
вузов Санкт-Петербурга.

Адрес университета и издательства: 195251, Санкт-Петербург,
Политехническая, 29.